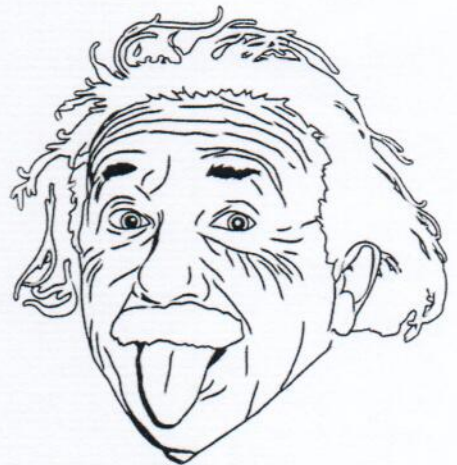
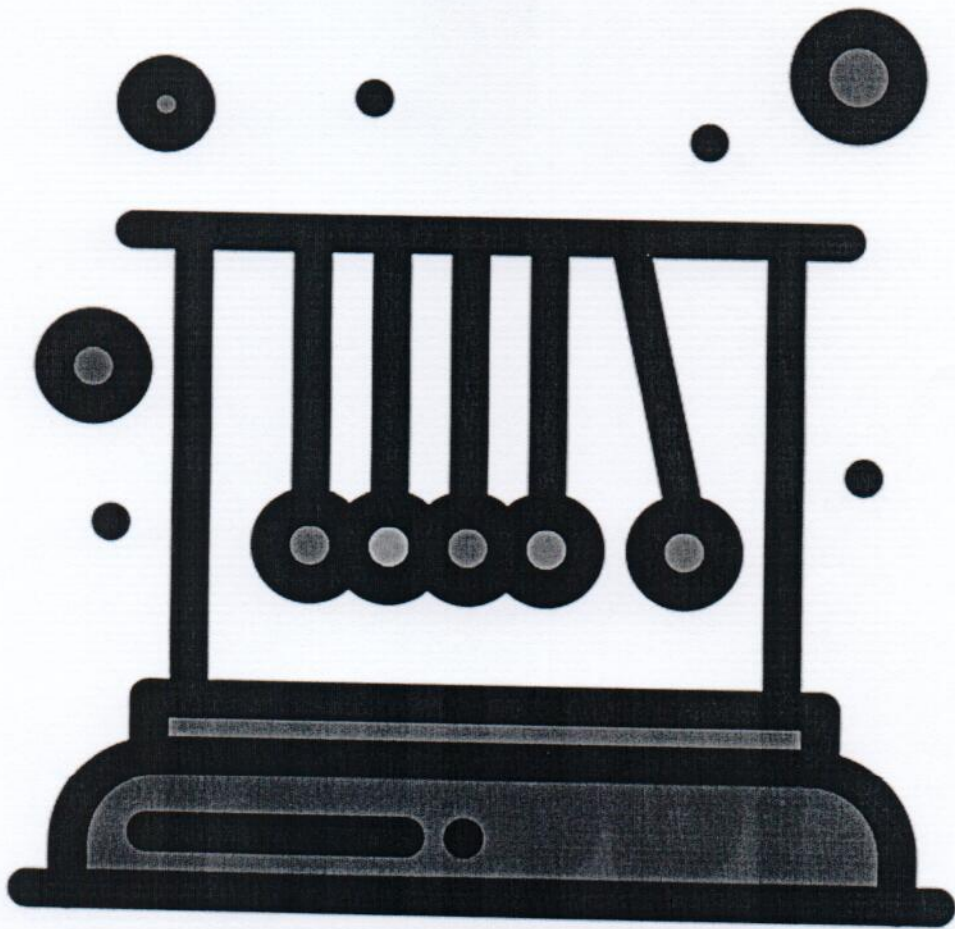


purgatorium

PHYSICIS

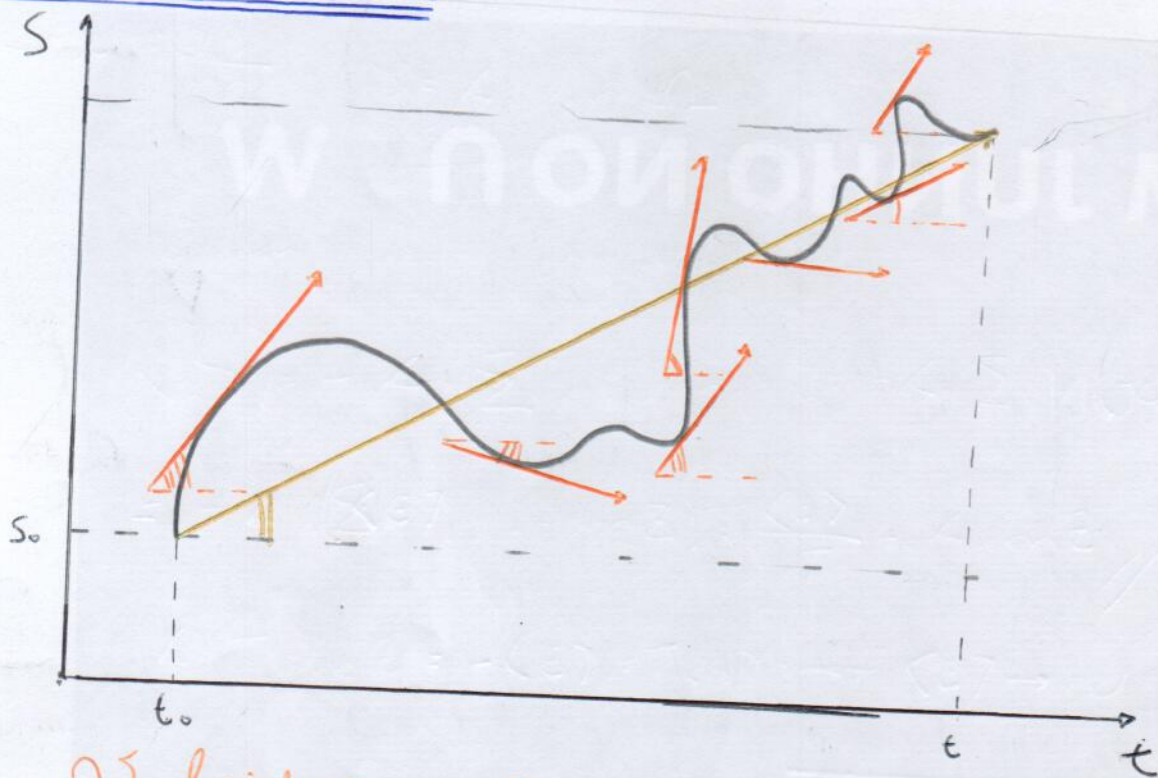


MOTUS



Cinematica

Velocidade Escalar



Velocidade Escalar Instantânea

Não as retas tangentes à apenas um ponto do "percurso".

$$V_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad * \text{ A tangente do ângulo formado pela inclinação desta reta é equivalente a velocidade instantânea.}$$

$$\left\{ \frac{dS}{dt} = V_{inst} \right.$$

Velocidade Escalar Média

É a reta secante, que corta o ponto inicial e o ponto final do "percurso".

$$\frac{dS}{dt} = V_{inst} \rightarrow dS = V_{inst} \cdot dt \rightarrow \int_{S_0}^S dS = \int_{t_0}^t dV \int dt \rightarrow$$

$$\rightarrow S \Big|_{S_0}^S = V \Big|_{V_0}^V \int_{t_0}^t dt = S - S_0 = (V - V_0) \cdot t \Big|_{t_0}^t = \Delta S = (V - V_0) \cdot (t - t_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = V - V_0 \rightarrow \left\{ \frac{\Delta S}{\Delta t} = V \right. \quad * \text{ A tangente da reta secante é equivalente a velocidade média.}$$

Movimento Escalar Uniforme

Velocidade escalar instantânea é constante

$$v_{\text{inst}} = v \equiv c + e \therefore v_{\text{média}}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} \rightarrow \boxed{s = s_0 + v \cdot \Delta t}$$

Demonstração:

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v \cdot dt \rightarrow s \Big|_{s_0}^s = v \cdot \int_{t_0}^t dt$$

$$s - s_0 = v \cdot t \Big|_{t_0}^t \rightarrow s = s_0 + v(t - t_0)$$

$$\boxed{s = s_0 + v \cdot \Delta t}$$

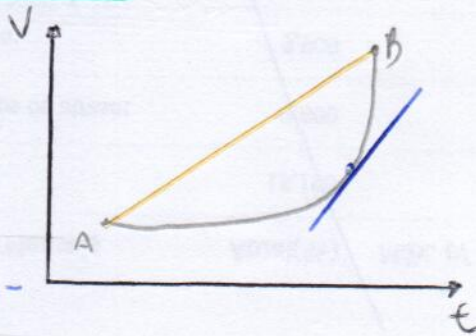
Movimento Escalar Uniformemente Variado

Aceleração instantânea é constante

$$a_{\text{inst}} = a \equiv c + e$$

Aceleração Escalar Instantânea

$$a_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



Reta secante = Aceleração média

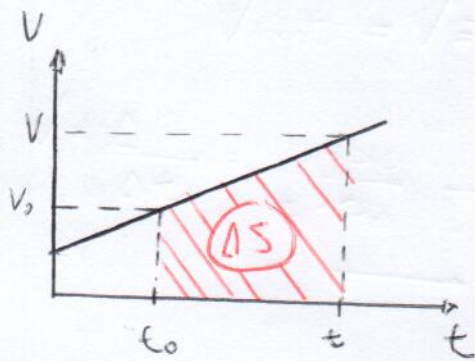
Reta tangente = Aceleração instantânea.

Aceleração Escalar Média

$$a_{\text{média}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Movimento retilíneo uniformemente variado (pt. 2)

$$a_{\text{inst}} = \frac{dV}{dt} \rightarrow a = \frac{V - V_0}{t - t_0} \rightarrow \boxed{V - V_0 = a \cdot \Delta t}$$



$$a = \frac{dV}{dt} \rightarrow \int_{V_0}^V dV = \int_{t_0}^t a dt \rightarrow$$

$$\rightarrow V \Big|_{V_0}^V = a \int_{t_0}^t dt \rightarrow V - V_0 = a \cdot (t - t_0)$$

$$V = V_0 + a \cdot t - a t_0 \rightarrow V = \frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} = (V_0 - a t_0) + a t$$

$$\rightarrow \int_{s_0}^s ds = (V_0 - a t_0) \cdot \int_{t_0}^t dt + a \cdot \int_{t_0}^t t dt \rightarrow S \Big|_{s_0}^s = (V_0 - a t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{a t^2}{2} \Big|_{t_0}^t$$

$$S - S_0 = V_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} (t^2 - t_0^2) - a t_0 \Delta t \rightarrow$$

$$S - S_0 = V_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} (t^2 - t_0^2 - 2t_0(t - t_0)) \rightarrow$$

$$\rightarrow S - S_0 = V_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} (t^2 - 2t_0 t + t_0^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow S - S_0 = V_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} (t - t_0)^2 \rightarrow \boxed{S = S_0 + V_0 \cdot \Delta t + \frac{a \cdot \Delta t^2}{2}}$$

Velocidade média no M.U.V

$$V_{\text{med}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V + V_0}{2}$$

Equações de Torricelli

$$\Delta t = \frac{V - V_0}{a} \rightarrow \Delta S = \frac{(V + V_0)}{2} \cdot \frac{(V - V_0)}{a}$$

$$\rightarrow \Delta S = \frac{V^2 - V_0^2}{2 \cdot a} \rightarrow \Delta S \cdot 2a = V^2 - V_0^2$$

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

Demonstração

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$V = \frac{dS}{dt}$$

$$\rightarrow a = \frac{dV}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

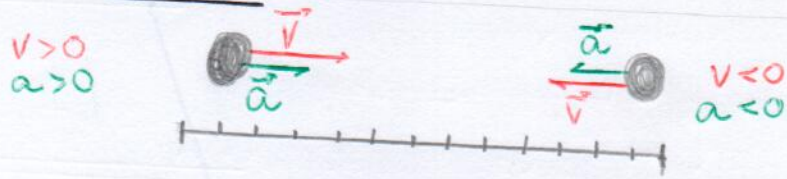
$$\rightarrow \frac{V dV}{dS} = a \rightarrow \int_{V_0}^V V dV = \int_{S_0}^S a \cdot dS$$

$$\rightarrow \frac{V^2}{2} \Big|_{V_0}^V = \int_{S_0}^S a dS \rightarrow \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = a \cdot S \Big|_{S_0}^S$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = a \cdot (S - S_0) \rightarrow V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S //$$

Movimento acelerado

Movimento em que o vetor velocidade e o vetor aceleração possuem o mesmo sentido



Movimento retardado

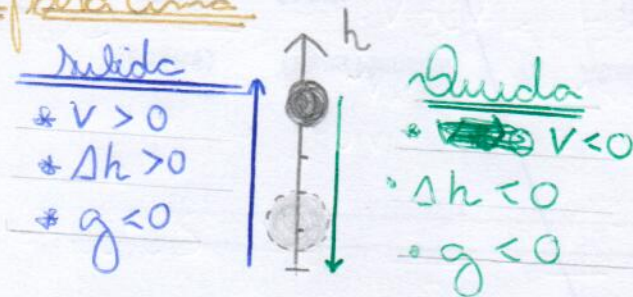
Movimento em que o vetor velocidade e o vetor aceleração possuem sentidos opostos.



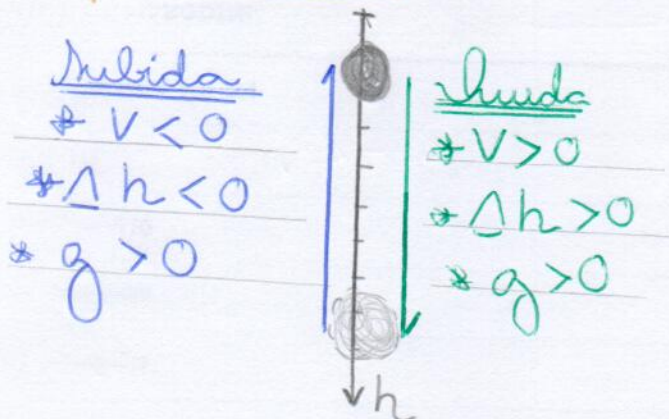
Lançamento vertical no vácuo

Peso = Força resultante $\rightarrow m \cdot g = m \cdot a \therefore g = a$

Referencial para cima



Referencial para baixo



Equações horárias da velocidade

$$V = V_0 + a \cdot \Delta t \rightarrow V = V_0 + g \cdot \Delta t$$

Equações horárias da altura

$$S = S_0 + V_0 \cdot \Delta t + \frac{a \cdot t^2}{2} \rightarrow h = h_0 + V_0 \cdot \Delta t + \frac{(g) \cdot t^2}{2}$$

Torricelli

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta t \rightarrow V^2 = V_0^2 + 2 \cdot (g) \cdot \Delta t$$

Velocidade média

$$V_{\text{med}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{V + V_0}{2}$$

Tempo de descida ("mundo real")

o movimento de descida ~~começa~~ inicia quando a velocidade do objeto é 0.

$$v_0 = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \xi - \eta x^2 \rightarrow \int_0^t dt = \int_0^x \frac{1}{\xi - \eta x^2}$$

$$\frac{1}{\xi - \eta x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \cdot \frac{2\sqrt{\xi \cdot \eta} \cdot \eta}{\eta(\xi - \eta x^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \cdot \frac{2\eta \sqrt{\xi \cdot \eta}}{(\eta \cdot \xi - \eta^2 x^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\xi - \eta x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \cdot \frac{(\xi \sqrt{\xi \cdot \eta} \eta + \eta \cdot \sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta^2 x + \eta^2 x)}{(\xi \cdot \eta - \eta^2 x^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\xi - \eta x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \left(\frac{\eta(\sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x)}{(\sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x)(\sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x)} + \frac{\eta(\sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x)}{(\sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x)(\sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x)} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\xi - \eta x^2} = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x} + \frac{1}{\sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x} \right)$$

$$Q = \sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x \rightarrow dQ = \eta dx \quad ; \quad z = \sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x \rightarrow dz = -\eta dx$$

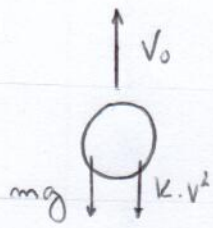
$$\rightarrow \int_0^x \frac{1}{\xi - \eta x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \left[\int \frac{1}{Q} dQ + \int \frac{(-1)}{z} dz \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^x \frac{1}{\xi - \eta x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x}{\sqrt{\xi \cdot \eta}} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x}{\sqrt{\xi \cdot \eta}} \right) \right]$$

$$\rightarrow \int_0^x \frac{1}{\xi - \eta x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\xi \cdot \eta}} \left[\ln \left(\sqrt{\xi \cdot \eta} + \eta x \right) - \ln \left(\sqrt{\xi \cdot \eta} - \eta x \right) \right]$$

$$t = \frac{\sqrt{m}}{2 \cdot \sqrt{k \cdot g}} \left[\ln \left(\sqrt{\frac{k \cdot g}{m}} + \frac{k}{m} \cdot v \right) - \ln \left(\sqrt{\frac{k \cdot g}{m}} - \frac{k \cdot v}{m} \right) \right]$$

Tempo de subida ("mundoreal")



2ª Lei de Newton

$$m \cdot g + k \cdot v^2 = m \cdot a$$

$$\frac{dv}{dt} = g + \frac{k}{m} v^2$$

$$\frac{dx}{dt} = g + \frac{k}{m} x^2 \rightarrow \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{g + \frac{k}{m} x^2} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{g + \frac{k}{m}} = \frac{1}{g \left(1 + \frac{\frac{k}{m}}{g} x^2 \right)} = \frac{1}{g \left(1 + \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} x \right)^2 \right)}$$

$$\rightarrow \text{tg } \varphi = \sqrt{\frac{k}{mg}} x \rightarrow x = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \text{tg } \varphi \therefore \frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \sec^2 \varphi$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{g + \frac{k}{m} x^2} = \int \frac{1}{g} \cdot \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} \sec^2 \varphi d\varphi}{1 + \text{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{g \cdot \frac{k}{m}}} \int \frac{\cancel{\sec^2 \varphi} d\varphi}{\sec^2 \varphi}$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{g + \frac{k}{m} x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{g \cdot \frac{k}{m}}} \cdot \varphi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{g \cdot \frac{k}{m}}} (\varphi - \varphi_0)$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{g + \frac{k}{m} x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{g \cdot \frac{k}{m}}} \left(\text{arctg} \left(\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \right) x \right) - \text{arctg} \left(\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \right) x_0 \right) \right)$$

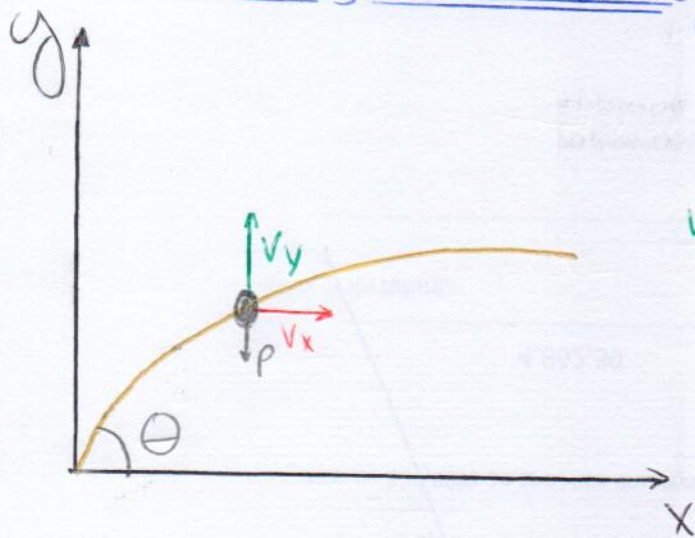
$$\rightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{g + \frac{k}{m} v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\frac{k \cdot g}{m}}} \left(\text{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot v \right) - \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot v_0 \right) \right)$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{k \cdot g}} \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v_0 \right)$$

$$\xi = x;$$

$$\eta = v;$$

Lançamento oblíquo



$$V_x = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$V_y = V_0 \cdot \sin \theta$$

No eixo X o movimento é uniforme (M.U)

No eixo Y o movimento é uniformemente variado (M.U.A.V)

Em X:

$$X = X_0 + V_x \cdot \Delta t \rightarrow \boxed{X = V_0 \cdot \cos \theta \cdot \Delta t}$$

Em Y

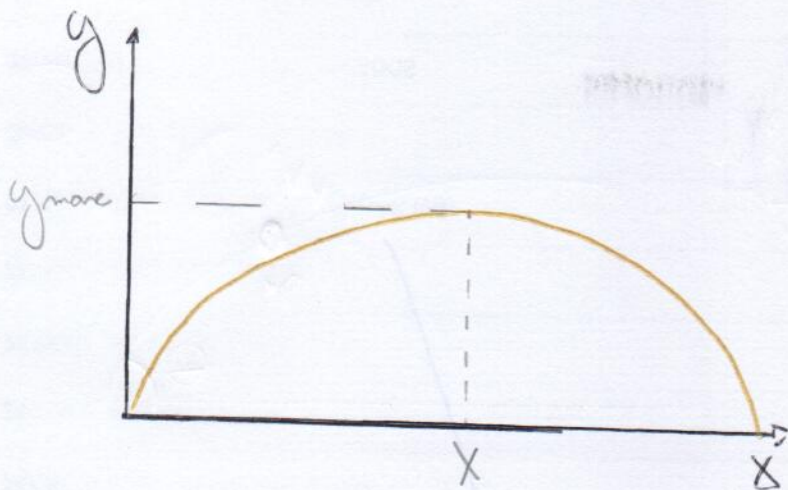
$$y = y_0 + V_{0y} \cdot \Delta t + \frac{(a_y)}{2} \cdot \Delta t^2 \rightarrow \boxed{y = V_0 \cdot \sin \theta \cdot \Delta t - \frac{g \cdot \Delta t^2}{2}}$$

$$\Delta t = \frac{X}{V_0 \cos \theta} \rightarrow y = V_0 \sin \theta \frac{X}{V_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{X^2}{V_0^2 \cos^2 \theta} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin \theta \cos \theta X - g X^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{V_0 \sin 2\theta X - g X^2}{V_0^2 (1 + \cos 2\theta)}} \rightarrow \text{A trajetória é uma parábola.}$$

Altura máxima



tempo de subida

$$v_y = v_{0y} - g \cdot \Delta t_{\text{subida}}$$

$$\Delta t_{\text{subida}} = \frac{v_0 \text{Sen} \theta}{|g|}$$

No vácuo $\Delta t_{\text{descida}} = \Delta t_{\text{subida}}$

$$\Delta t_{\text{total}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{Sen} \theta}{|g|}$$

Para X:

$$X = v_0 \text{Cos} \theta \cdot \Delta t \rightarrow X = v_0 \cdot \overbrace{\frac{\text{Cos} \theta \cdot \text{Sen} \theta \cdot 2 \cdot v_0}{|g|}}^{\text{"arco duplo"}}$$

$$X = \frac{v_0^2 \cdot \text{Sen}(2\theta)}{|g|}$$

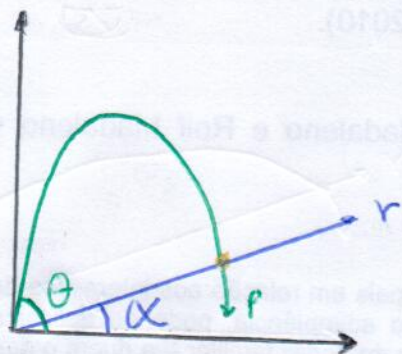
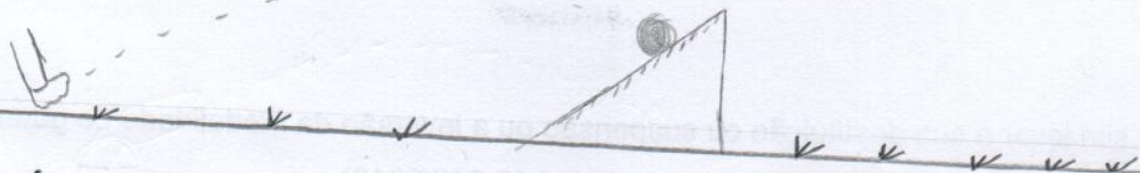
Para X máximo o $\text{Sen}(2\theta)$ deve ser o máximo

$$X_{\text{máx}} \leftrightarrow \text{Sen}(2\theta) = 1 \therefore \theta = 45^\circ //$$

$$X_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{Sen}(2 \cdot 45^\circ)}{|g|}$$

$$X_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{|g|}$$

Lançamentos acertando plano inclinado



* Reta r: $y = \text{tg } \alpha x //$

* Parábola p: $y = v_0 \text{sen } \theta x - \frac{|g| x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$

$y = \text{tg } \theta x - |g| (1 + \text{tg}^2 \theta) x^2 //$

Ponto de contato: $\text{tg } \alpha x = \text{tg } \theta x - \frac{|g| (1 + \text{tg}^2 \theta) x^2}{2 v_0^2}$

$\left(\frac{|g|}{2 v_0^2} (1 + \text{tg}^2 \theta) x - \text{tg } \theta + \text{tg } \alpha \right) \cdot x = 0$

$x = \frac{\text{tg } \theta - \text{tg } \alpha}{\frac{|g|}{2 v_0^2} (1 + \text{tg}^2 \theta)} \rightarrow x = \frac{2 \cdot v_0^2}{|g|} (\text{tg } \theta - \text{tg } \alpha) \cdot \cos^2 \alpha$

$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \frac{2 v_0^2}{|g|} (\sec^2 \theta \cos^2 \theta + (\text{tg } \theta - \text{tg } \alpha) 2 \cdot \cos \theta (-\text{sen } \theta))$

$1 - \text{sen } \theta \cos \theta (\text{tg } \theta - \text{tg } \alpha) = 0$

$1 = 2 \text{sen } \theta \cos \theta (\text{tg } \theta - \text{tg } \alpha)$

$1 = 2 \text{sen } \theta \cos \theta \left(\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} - \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \right)$

$\frac{(\text{sen } \theta \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cos \theta) 2 \text{sen } \theta \cos \theta}{\cancel{\cos \theta} \cdot \text{sen } \alpha}$

$\text{sen}^2 \theta \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cos \theta \text{sen } \theta = \frac{1}{2}$

hincamamento obliquo em plano inclinado (pt. 2)

$$\text{Sen}^2 \theta \cos \alpha - \text{Sen} \alpha \cos \theta \text{Sen} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{Sen}^2 \theta - \text{tg} \alpha \text{Sen}(2\theta) = \frac{1}{2} \rightarrow 1 - \cos(2\theta) - \text{tg} \alpha \text{Sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{tg} \alpha \text{Sen}(2\theta) = -\cos(2\theta) \rightarrow \text{tg} \alpha + \text{tg}(2\theta) = -1 \rightarrow$$

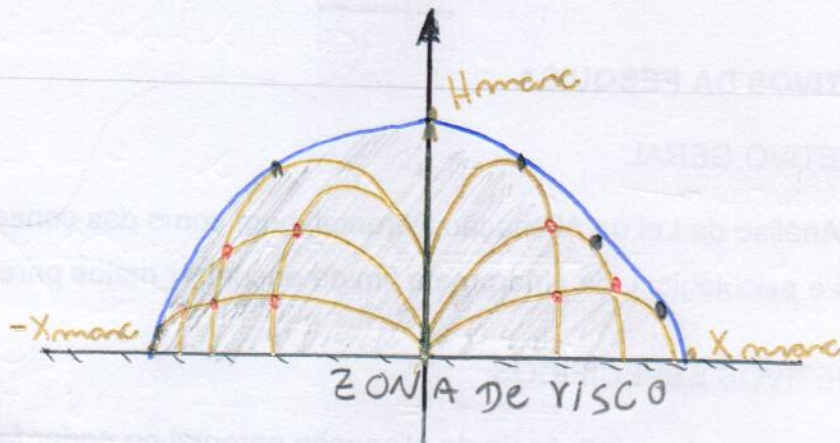
$$\rightarrow \boxed{\frac{\text{Sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\text{Sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = -1}$$

$$2\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha - 2\theta = -\frac{\pi}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(\alpha - 2\theta) = 0 \rightarrow \text{Sen} \alpha \text{Sen}(2\theta) + \cos \alpha \cos(2\theta) = 0 //$$

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

Parábola de segurança



$$* H_{max} = \frac{V_0^2}{2|g|}$$

$$* X_{max} = \frac{V_0 \cos \theta \cdot 2 V_0 \sin \theta}{g}$$

É a parábola que tangencia o caminho de trajetória de todas as possibilidades de lançamento de um ponto fixo.

$$X = X_0 + V_0 \cos \theta \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{x}{V_0 \cos \theta} \rightarrow y = y_0 + V_0 \sin \theta \Delta t - \frac{|g|}{2} \Delta t^2$$

$$y = \tan \theta x - \frac{|g|}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta} \rightarrow y = \tan \theta x - \frac{|g| \cdot x^2}{2 V_0^2} (1 + \tan^2 \theta) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|g| x^2}{2 V_0^2} \tan^2 \theta + \frac{|g| \cdot x^2}{2 V_0^2} - \tan \theta x + y = 0$$

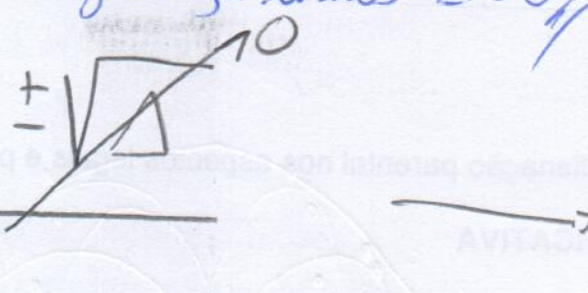
$$\rightarrow \tan^2 \theta - \frac{2 V_0^2}{|g| x} \tan \theta + \frac{2 V_0^2 y}{|g| x^2} + 1 = 0$$

$$\tan \theta = \frac{2 V_0^2}{|g| x} \pm \sqrt{\frac{4 V_0^4}{g^2 x^2} - 4 \frac{2 V_0^2 y}{|g| x^2}}$$

- Se $\Delta < 0$, estamos na zona fora da parábola de segurança
- Se $\Delta > 0$, estamos em uma situação de encontro de 2 lançamentos
- Se $\Delta = 0$, estamos em uma situação que tangencia a parábola

Parábola de segurança (pt. 2)

Para a parábola de segurança temos $\Delta = 0$

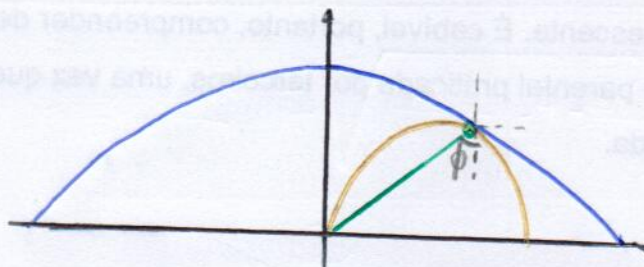
$$t_{g\theta} = \frac{2V_0^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2|g|x}$$


$$t_{g\theta} = \frac{V_0^2}{|g|x} \quad \therefore \quad \theta = \arctg\left(\frac{V_0^2}{|g|x}\right)$$

* Como $\Delta = 0$

$$\frac{4V_0^4}{|g|^2 x^2} - 4 - \frac{8V_0^2 y}{|g|x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{8V_0^2 y}{|g|x^2} = \frac{4V_0^4}{|g|^2 x^2} - 4$$

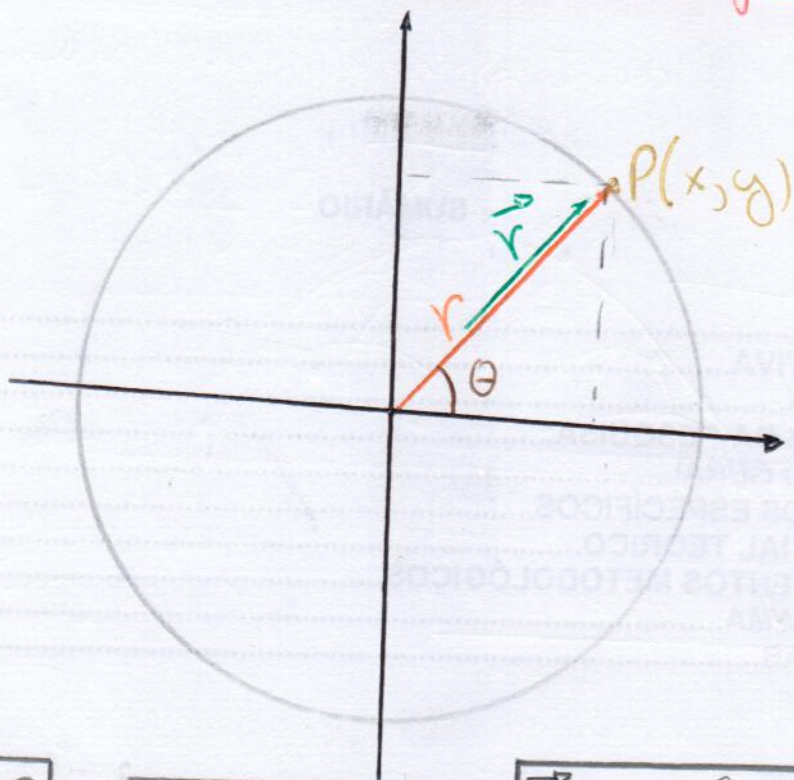
$$y = \frac{V_0^2}{2|g|} - \frac{|g|x^2}{2V_0^2} \quad \rightarrow \quad \text{Altura}$$



No ponto de contato a velocidade radial = 0

$$t_{g\phi} = -\frac{x}{y} = \frac{V_y}{V_x}$$

Movimento circular uniforme



$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}$$

→ $\vec{r} = r \cdot \cos \theta \hat{i} + r \cdot \sin \theta \hat{j}$ * Como o ângulo varia com o tempo

$$\vec{r}(t) = r \cdot \cos \theta(t) \cdot \hat{i} + r \cdot \sin \theta(t) \cdot \hat{j}$$

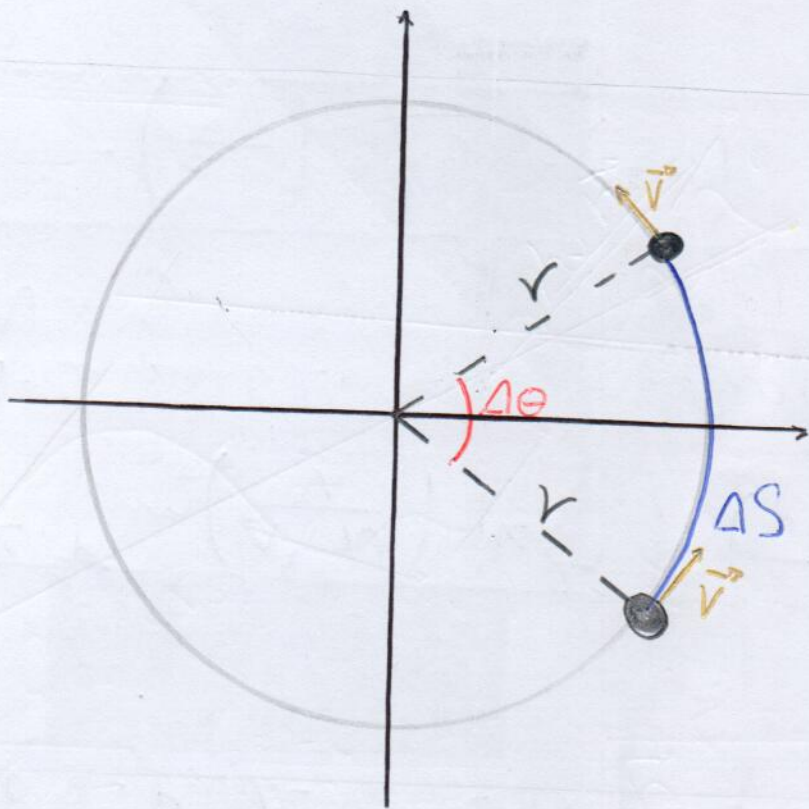
$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt} \therefore \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot (-\sin \theta)(t) \cdot \dot{\theta} \hat{i} + r \cos \theta(t) \dot{\theta} \hat{j}$$

* $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (velocidade angular) → $\vec{v}(t) = r \cdot (-\sin \theta)(t) \cdot \omega \hat{i} + r \cdot \cos \theta(t) \omega \hat{j}$

$$\vec{v}(t) = r \cdot \omega [-\sin \theta(t) \hat{i} + \cos \theta(t) \hat{j}]$$
 * Se ω é cte →

$$\vec{v} = r \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

Movimento Circular uniforme (p. 2)



Considerando $|\vec{v}| = cte$, $2\pi R = 2\pi r_{rod} \rightarrow 2\pi r \cdot \Delta\theta = 2\pi v_{AD} \cdot \Delta S$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S = r \cdot \Delta\theta}$$

Velocidade angular instantânea:

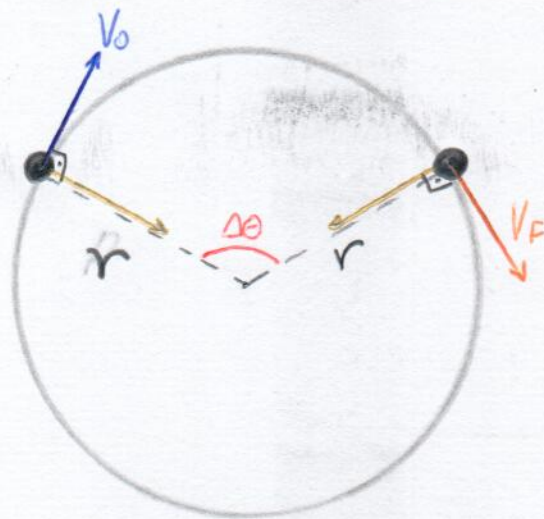
$$\omega_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \text{ como } \omega = cte \rightarrow \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega \cdot (t - t_0) = \theta - \theta_0 \therefore \boxed{\omega \cdot \Delta t = \Delta\theta}$$

$$\rightarrow \text{Como } \omega = \frac{\vec{v}}{r} \rightarrow \boxed{\Delta\theta = \frac{\vec{v} \cdot \Delta t}{r}} * \vec{v} \cdot \Delta t = \Delta S \parallel \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta S}{r}}$$

Movimento Circular Uniforme (pt. 3)



Mesmo a velocidade se mantendo constante, sua direção está variando, de acordo com Newton, para isso ocorrer, existe uma força, e com isso uma aceleração variando a direção do vetor velocidade.

Sabemos que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; e que $\vec{v} = r \cdot \omega [-\text{sen}\theta(t)\hat{i} + \text{cos}\theta(t)\hat{j}]$

$$\vec{a} = r \cdot \omega [-(\text{cos}\theta) \cdot (t) \cdot \dot{\theta} \cdot (t)\hat{i} + (-\text{sen}\theta) \cdot (t) \cdot \ddot{\theta} \cdot (t)\hat{j}] \rightarrow$$

$$\vec{a} = r \cdot \omega \cdot \{-\omega [\text{cos}\theta(t)\hat{i} + \text{sen}\theta(t)\hat{j}]\} \rightarrow$$

$$\vec{a} = r \cdot -\omega^2 [\text{cos}\theta(t)\hat{i} + \text{sen}\theta(t)\hat{j}] \rightarrow$$

$$\vec{a} = -\omega^2 [r \cdot \text{cos}\theta(t)\hat{i} + \text{sen}\theta(t)\hat{j}] \rightarrow$$

Vetor \vec{r}

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \langle \vec{r} \rangle = -\omega^2 \cdot r \rightarrow |\vec{a}| = |\omega^2| \cdot |r| \therefore$$

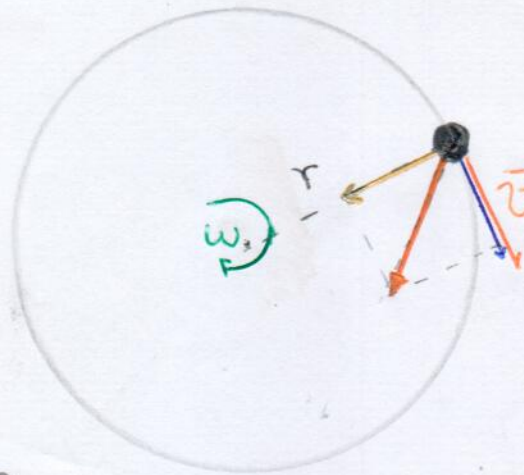
$$\boxed{a = \omega^2 \cdot r} \rightarrow * \text{com } \omega = \frac{v}{r} \rightarrow a = \frac{v^2}{r^2} \cdot r \therefore \boxed{a = \frac{v^2}{r}}$$

$$\rightarrow * \text{Como } \vec{F}_r = m \cdot \vec{a} \rightarrow \boxed{F = m \cdot \omega^2 \cdot r} \text{ ou } \boxed{F = \frac{m \cdot v^2}{r}}$$

A aceleração que apenas muda o sentido, nesse caso é conhecida como aceleração centrípeta, e a força como força centrípeta.

Movimento Circular Uniformemente Variado

* Tanto a velocidade angular quanto a velocidade tangencial variam, portanto além da aceleração centrípeta que altera a direção do vetor velocidade, existe uma aceleração que afeta o módulo do vetor velocidade.



- Aceleração centrípeta
- Aceleração tangencial
- Aceleração aparente.

Sabemos que $\Delta\theta = \frac{\Delta S}{r} \rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{S - S_0}{r}$

$\rightarrow (\theta - \theta_0) \cdot r = S - S_0 \therefore \boxed{S = S_0 + r\theta - r\theta_0}$

→ Sabemos que $\frac{dS}{dt} = v$, portanto se manipulamos essa equação:

$$\underbrace{\frac{dS}{dt}}_v = \underbrace{\frac{dS}{d\theta}}_r \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_\omega \rightarrow v = r \cdot \omega, \text{ mas } v \text{ e } \omega \text{ variam em função do tempo } \theta \theta$$

$$\begin{cases} v = v(t) \\ \omega = \omega(t) \end{cases}$$

Sabemos que $v = v_0 + a \cdot \Delta t$, $\therefore v_{\text{tan}} = v_0 + a_{\text{tan}} \cdot \Delta t = r \cdot \omega \rightarrow$

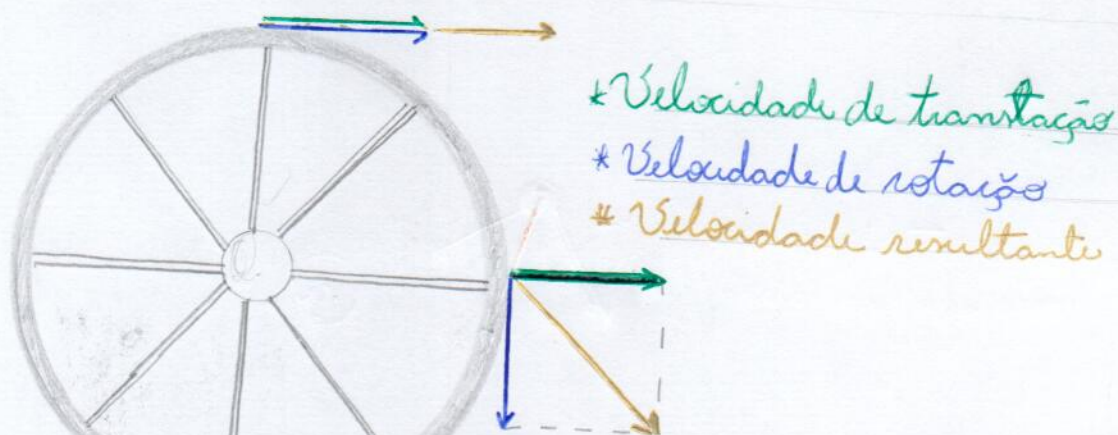
$\rightarrow \underbrace{\frac{v_0}{r}}_{\omega_0} + \underbrace{\frac{a_{\text{tan}}}{r}}_{\alpha} \cdot \Delta t = \omega(t) \therefore \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \cdot \Delta t}$

* Como a aceleração centrípeta é $a_{\text{cent}} = \frac{v_{\text{tan}}^2}{r}$ e $v_{\text{tan}} = v_0 + a_{\text{tan}} \cdot \Delta t$

$\rightarrow \boxed{a_{\text{cent}} = \frac{(v_0 + a_{\text{tan}} \cdot \Delta t)^2}{r}}$

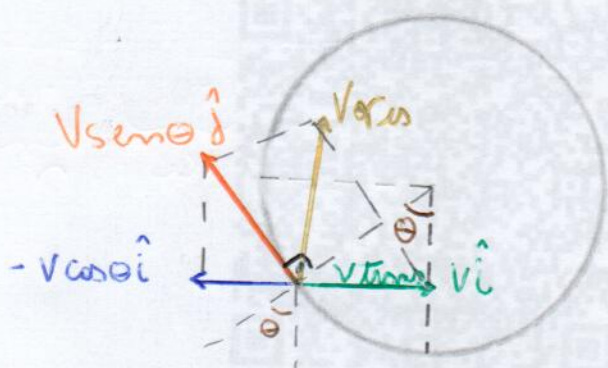
Condição de não-deslizagem (simples)

O ponto da roda que entra em contato com a superfície possui velocidade resultante 0.



Para a roda não deslizar $V_{res} = 0$

$$|V_{translação}| = |V_{rotação}|$$



$$\vec{V}_{res} = (V - V \cdot \cos\theta) \hat{i} + V \sin\theta \hat{j} \rightarrow V_{res} = \sqrt{V^2(1 - \cos\theta)^2 + V^2 \sin^2\theta}$$

$$V_{res} = V \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{2(1 - \cos\theta)} = V \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$V_{res} = 2V \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2V \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = V_{res}$$

* Atenção: O ponto de contato é estático

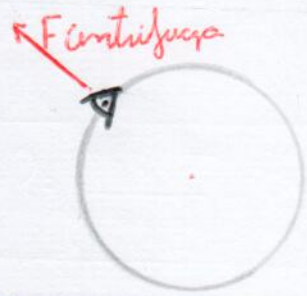
"Pseudoforças"

Também conhecidos como forças de d'Alembert ou forças inerciais, é o fenômeno que ocorre quando se faz a análise de um sistema a partir de um referencial não-inercial, o qual está sofrendo a ação deste momento.

Exemplo:

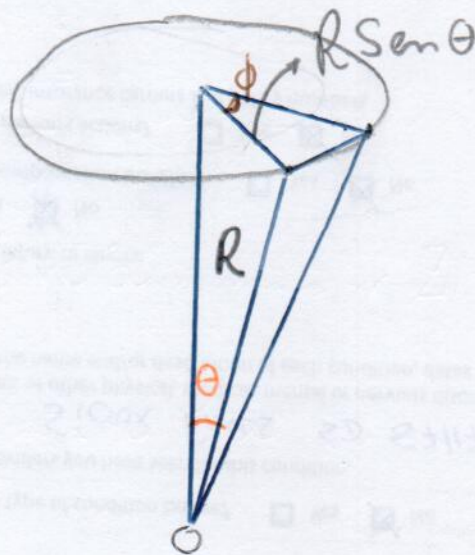


*Referencial inercial



*Referencial não-inercial

Atenção: Em um sistema que existe força centrípeta não existe força centrífuga, vice-versa, pois a análise do sistema é diferente. É mesmo que iguais em módulo, elas não são um par ação-reação.

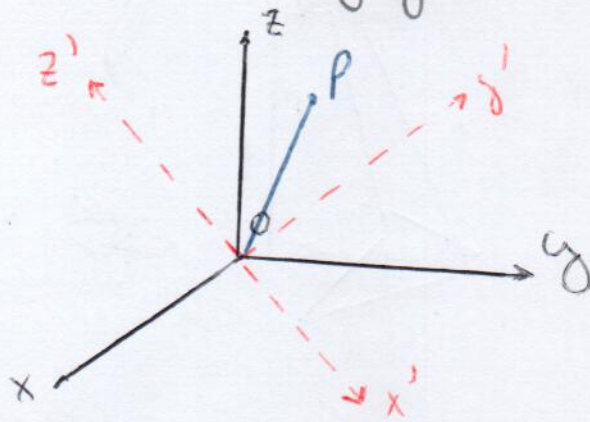


"Pseudovetores" (pt. 2)

Faixa de Corridos

O vetor posição \vec{r} em qualquer ponto (x, y, z) pode ser representado em função do tempo, o $\vec{r} = r(t)$

* Para o espaço temos $r = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$
 * Para o corpo temos $r = x' \cdot \hat{i}' + y' \cdot \hat{j}' + z' \cdot \hat{k}'$ } para $t=0$, os dois referenciais coincidem.



Temos que a velocidade angular é: $dR = \sin \theta d\phi \cdot R = d\phi \cdot R \frac{dR}{dt}$
 $\rightarrow \frac{d\phi}{dt} \cdot R = \vec{\omega} \cdot R \cdot \frac{d\hat{i}'}{dt} = \omega \cdot \hat{i}'$

$$* \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (\hat{i}' x' + \hat{j}' y' + \hat{k}' z') = \boxed{x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}' + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt}}$$

$$\rightarrow x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}' + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt} = x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}' + x' (\omega \cdot \hat{i}') + y' (\omega \cdot \hat{j}') + z' (\omega \cdot \hat{k}')$$

$$\rightarrow x' \cdot \hat{i}' + y' \cdot \hat{j}' + z' \cdot \hat{k}' + \vec{\omega} \cdot r \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)_{\text{não inercial}} = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{\text{inercial}} + \vec{\omega} \cdot r \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{d'r}{dt} \right) + \vec{\omega} \cdot r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) = \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{d'r}{dt} + \vec{\omega} \cdot r \right) \frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{d'\omega}{dt} \cdot r + \vec{\omega} \frac{d'r}{dt} \right) + \left(\omega \cdot \frac{d'r}{dt} \right) + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r) \frac{d^2 r}{dt^2} + 2\vec{\omega} \frac{d'r}{dt} + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot r}$$

"Pseudoforças" (pt 3)

(Continuação) Força de Coriolis

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d'r + \vec{\omega} \cdot r \right) \frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{d'\omega \cdot r + \vec{\omega} \frac{d'r}{dt} \right) + \left(\omega \cdot \frac{d'r}{dt} \right) + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r) \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \omega \frac{d'r}{dt} + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r) \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Sabemos que $|\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot r)|$ é a aceleração centrípeta.

$$|\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot r)| = \omega^2 r \cdot \sin\theta = \frac{v^2}{r \sin\theta}$$

* O termo $2 \vec{\omega} \cdot \frac{d'r}{dt}$ é conhecido como aceleração de Coriolis

Sabemos que Resultante = $m \cdot a$, portanto $\vec{F} = m \vec{a}$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} + m \cdot \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r) + 2 m \vec{\omega} \left(\frac{d'r}{dt} \right) + m \cdot \frac{d\vec{\omega} \cdot r}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d^2 r}{dt^2} + m \cdot \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r) + 2 m \vec{\omega} \frac{d'r}{dt} + m \frac{d\vec{\omega} \cdot r}{dt}$$

Substituindo temos:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_{res} \cdot \frac{d'r}{dt} = v' \cdot F_{res} = F - 2 m (\vec{\omega} \cdot v') - m (\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot r)) - m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= F - 2 m \omega \cdot v' r + m \omega^2 \cdot r$$

↳ Força de Coriolis

↳ Força Centrífuga

Forças

2ª lei de Newton

a força é proporcional a taxa de variação de quantidade de movimento.

$$\text{Força} \propto \frac{m \cdot (v - v_0)}{t} \rightarrow \frac{v - v_0}{t} = a, \text{ portanto}$$

$$F \propto m \cdot a \rightarrow F = k \cdot m \cdot a$$

↳ constante de proporcionalidade

→ $k = 1$, pois foi definido de forma que se $a = 1 \text{ m/s}^2$ e $m = 1 \text{ kg}$

$F = 1 \text{ N}$, dessa forma resultados brutos são mais fáceis de encontrar.

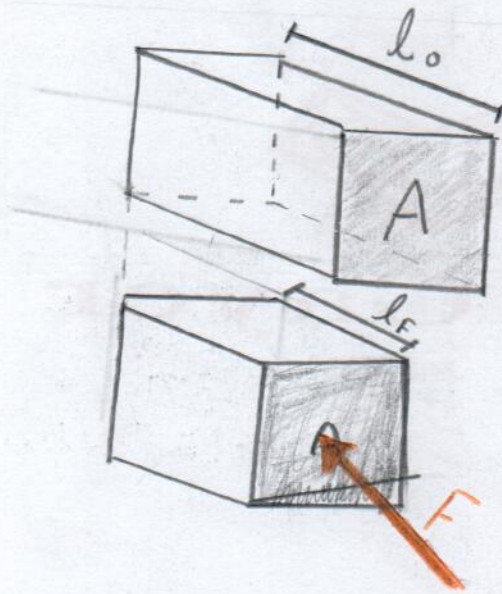
Relação pressão e força

Pressão é uma grandeza escalar. Ela é relacionada com o vetor área e com a força aplicada nesta região.

$$p = \frac{F}{A}$$

Força (pt. 2)

Deformação



~ Ao aplicar uma força, ocorre uma deformação no objeto

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \rightarrow \boxed{F = \frac{E \cdot A}{L_0} \cdot \Delta L}$$

↳ "Constante de deformação" (K)

* E: É conhecido como módulo de Young, e é uma constante dada por

$$\boxed{\frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

* ε : É a "fadiga" induzida no material.

* σ : é a tensão aplicada na região do material.

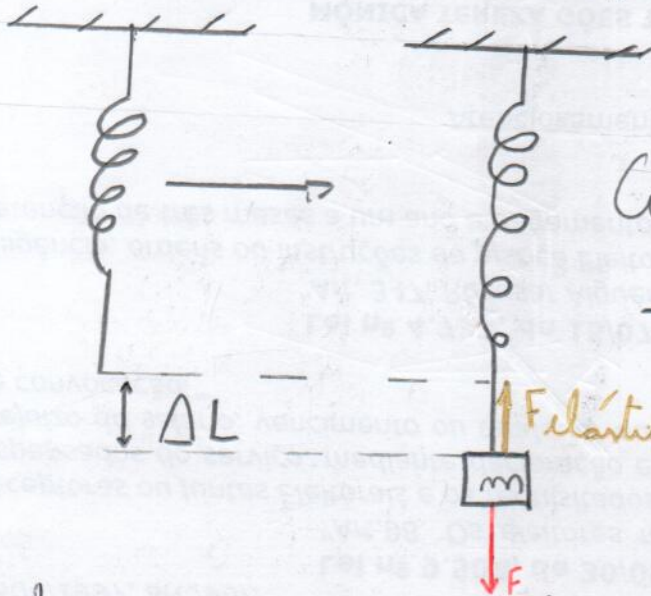
Como $\boxed{\frac{F = E \cdot A \cdot \Delta L}{L_0}}$ e $\frac{E \cdot A}{L_0}$ pode ser substituído por K,

temos que $\boxed{F = \frac{K \cdot \Delta L}{L_0}}$

Força (pt. 3)

Molas

As molas sofrem, normalmente, deformações mais facilmente que outros materiais devido à maneira que são fabricados.



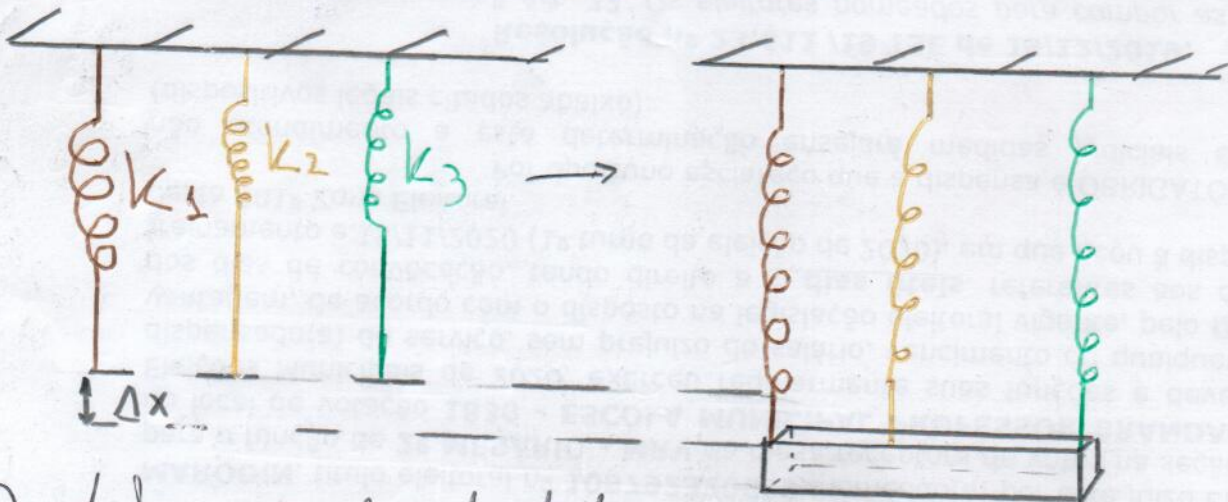
$$\text{Como } F = \overset{k}{\underbrace{E \cdot \epsilon}} \cdot \Delta L \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{\text{elástica}} = -k \cdot \Delta L, \text{ ou}$$

$$\boxed{F_{\text{el}} = -k \cdot \Delta x}$$

O sinal negativo surge devido ao fato de a força elástica ter sentido oposto ao de movimentação do sistema.

Associação de molas em paralelo



A deformação Δx de todas as molas não é igual; portanto:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_{\text{eq}} \rightarrow \text{Como } F_{\text{elástica}} = -k \Delta x \rightarrow$$

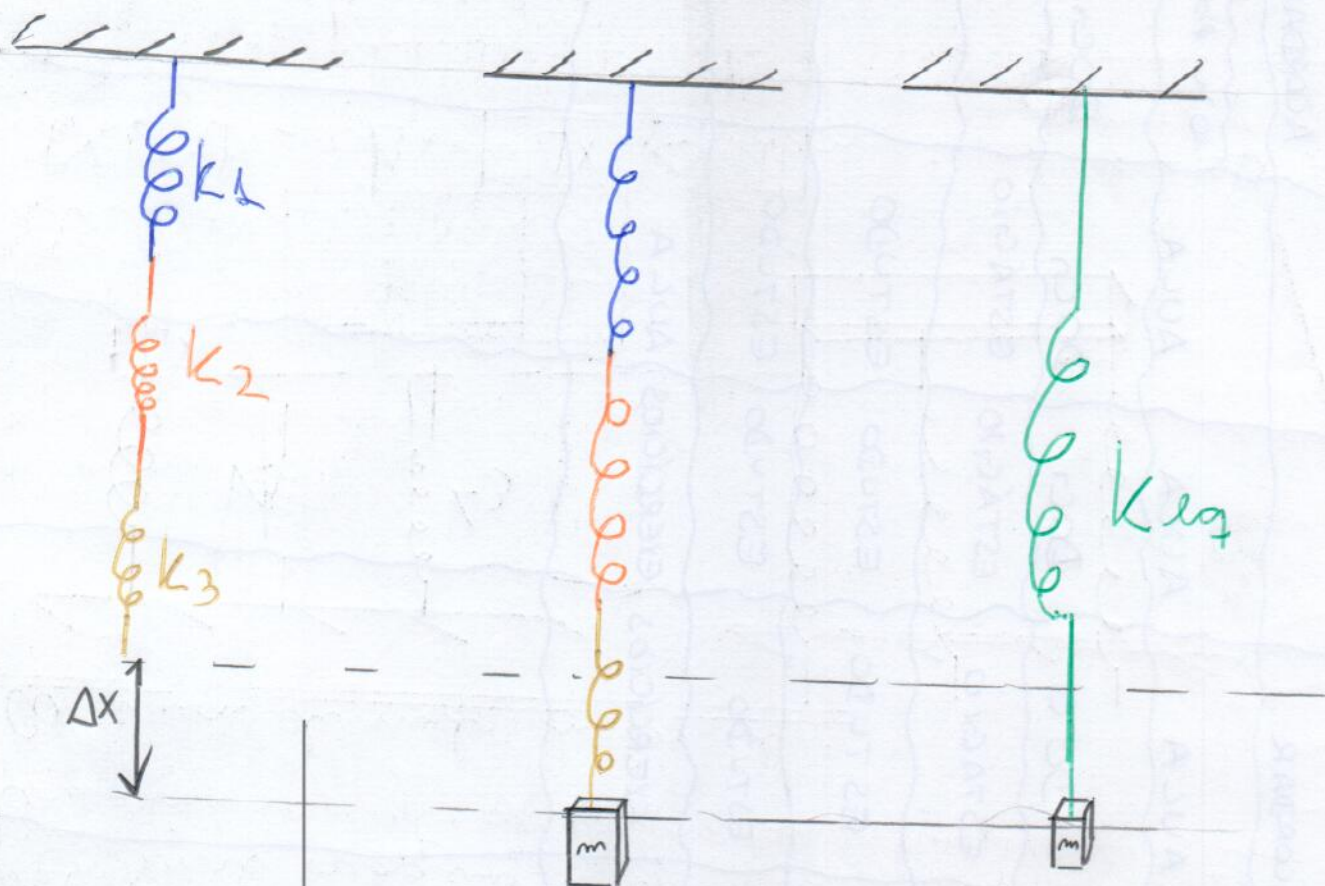
$$\rightarrow k_1 \cdot \Delta x_1 + k_2 \cdot \Delta x_2 + k_3 \cdot \Delta x_3 = k_{\text{eq}} \cdot \Delta x_{\text{eq}} \rightarrow \boxed{k_1 + k_2 + k_3 = k_{\text{eq}}}$$

Podemos substituir estas 3 molas por 1 equivalente de constante $k_1 + k_2 + k_3$ portanto a mola equivalente exerce uma força de:

$$\boxed{F_{\text{eq}} = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot -\Delta x}$$

Forças (pt. 4)

Associação de molas em série



a força aplicada é igual em todas as molas, entretanto a maneira que vão se comportar é diferente

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_{eq}$$

* A deformação de cada mola é diferente, temos que $\Delta x_{total} = x_1 + x_2 + x_3$

Sabemos que força elástica é $F_{el} = -k \cdot \Delta x \rightarrow$

se fizermos

$$\frac{-(k_1 \cdot x_1)}{k_1} + \frac{(k_2 \cdot x_2)}{k_2} + \frac{(k_3 \cdot x_3)}{k_3} = \frac{(k_{eq} \cdot x_{eq})}{k_{eq}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k_{eq}}$$

Trabalho

Sabemos que $\vec{F}_{res} = m \cdot a$; $\mathcal{C} = \int_0^x \vec{F}_{res} dx \longrightarrow$

$$\longrightarrow \vec{F}_{res} \cdot d\vec{x} = F_{res} \cdot dx \rightarrow \mathcal{C}_{F_{res}} = \int_0^x m \cdot a \cdot dx \longrightarrow$$

Sabemos que $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$; $\boxed{a \cdot dx = v \cdot dv} \longrightarrow$

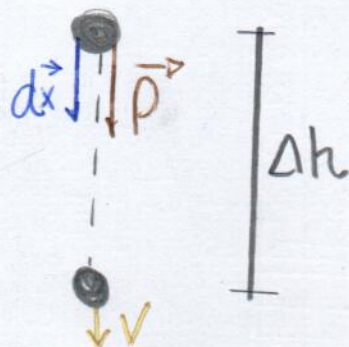
$$\mathcal{C}_{res} = \int_0^x m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx = \int_{v_0}^v m \cdot v \cdot dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^v$$

$$\mathcal{C}_{F_{res}} = m \cdot \frac{v^2}{2} - m \cdot \frac{v_0^2}{2} , \text{ Como } E_{cinética} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathcal{C}_{F_{res}} = \Delta E_{cinética}}$$

Trabalho da força peso

* Queda livre



$$\vec{p} \cdot d\vec{x} = p \cdot dx \cdot \cos \theta \rightarrow \theta = 0^\circ ; \therefore p \cdot dx \cdot \cos 0^\circ$$

$$\mathcal{C}_{peso} = \int_{x_0}^{x_F} \vec{p} \cdot d\vec{x} = m \cdot g \int_{x_0}^{x_F} dx = mg \Big|_{x_0}^{x_F} = mg(x_F - x_0)$$

$$\mathcal{C}_{peso} = mg \cdot \Delta x \rightarrow \text{Como } \Delta x \text{ é a altura } \rightarrow \mathcal{C}_{peso} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

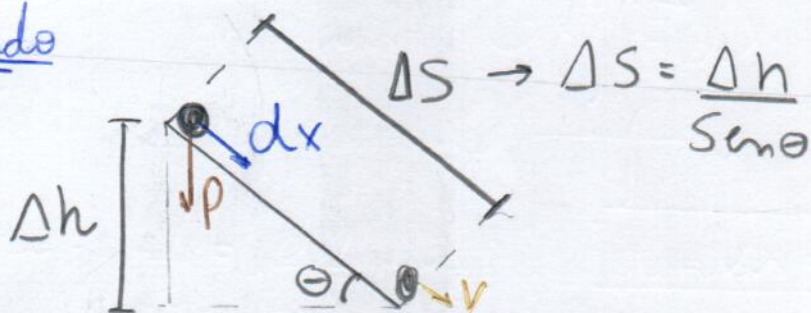
$$\ominus m \cdot g \cdot \Delta h = -mg(h_F - h_0) ; \therefore \mathcal{C}_{peso} = mg \cdot h_0 - mg \cdot h_F$$

Altura diminuiu de h_0 para h_F Como $E_{pot\ grav} = m \cdot g \cdot h \rightarrow \boxed{\mathcal{C}_{peso} = -\Delta E_{pot\ grav}}$
Com novo referencial

Trabalho (pt. 2)

Trabalho da força peso

Plano inclinado

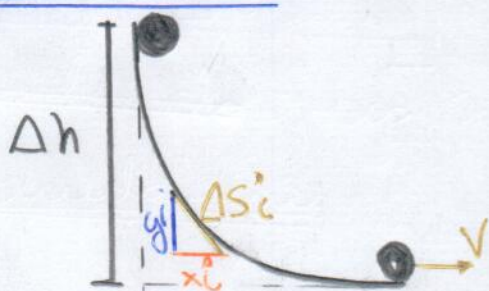


$$T_{\text{peso}} = P_t \cdot \Delta S = mg \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{\Delta h}{\operatorname{Sen} \theta} = \boxed{mg \cdot \Delta h} \rightarrow$$

$$\rightarrow mg(h_{1F} - h_0) = -(mgh_{1F} - mgh_0) = T_{\text{peso}}$$

$$\boxed{T_{\text{peso}} = -\Delta E_{\text{pot grav}}}$$

Queda Curvada



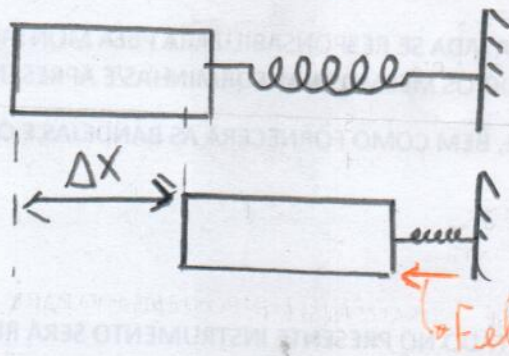
$$n \Delta S_i \rightarrow 0 ; \rightarrow$$

$$T_{\text{peso}} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta T_i \rightarrow$$

$$T_{\text{peso}} = \int dT = mg \int dy$$

$$T_{\text{peso}} = mg(y_0 - y_1) = mg \Delta y \rightarrow \boxed{T_{\text{peso}} = -mg \cdot \Delta h}$$

Trabalho (pt. 3)



$$\vec{F}_{elástica} \cdot d\vec{x} = F_{elástica} \cdot dx \cdot \cos 180^\circ = -F_{elástica} \cdot dx$$

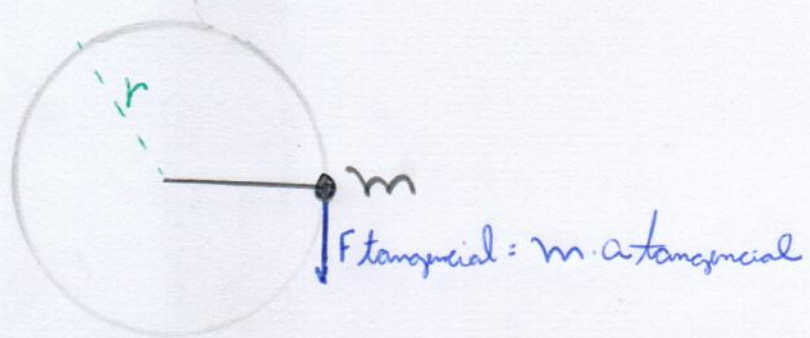
$$W_{F_{elástica}} = \int_{x_0}^x -k \cdot x \cdot dx = -k \int_{x_0}^x x \cdot dx \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{F_{elástica}} = -k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^x = -\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{W_{F_{elástica}} = -\Delta E_{elástico}}$$

Momento de inercia (I)

Momento de inercia de uma massa puntiforme

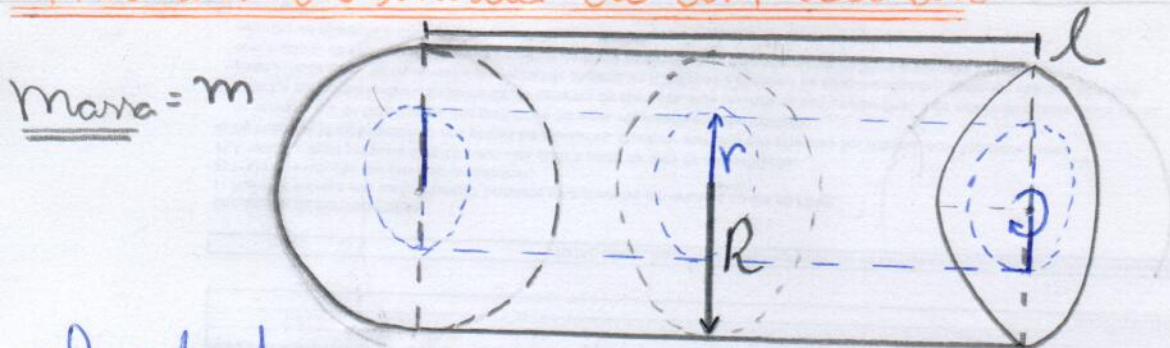


Como $a_{\text{tangencial}} = \alpha \cdot r$, em que α é a aceleração angular, temos que $\boxed{F_{\text{tan}} = m \cdot \alpha \cdot r}$

Sabendo que o torque (τ) = $F \cdot d$ ou $\tau = I \cdot \alpha$, podemos reorganizar que:

$$\tau = m \cdot \alpha \cdot r \cdot r = I \cdot \alpha \quad \therefore \boxed{I = m \cdot r^2}$$

Momento de inercia de um cilindro



O cilindro interno azul representa o eixo de rotação. Sabemos que densidade (ρ) é $\rho = \frac{\text{massa}}{\text{Volume}}$ $\therefore \boxed{\rho = \frac{m}{\pi R^2 l}}$

Como o eixo de rotação "não tem" volume podemos dizer:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{\pi R^2 l} \rightarrow dV = 2\pi r \cdot dr \cdot l = 2\pi l \cdot r \cdot dr$$

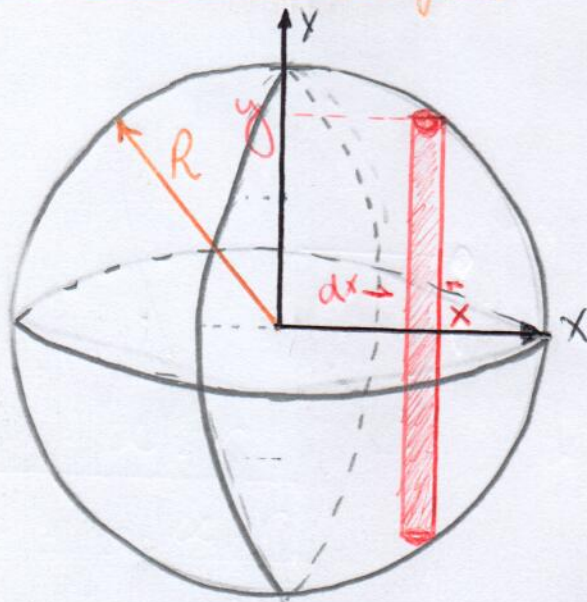
$\cdot dm = \frac{m}{\pi R^2 l} \cdot dV$

→ Como $\frac{dm}{dV} = \frac{m}{\pi R^2 l}$, podemos substituir dV $\therefore \frac{dm}{\pi R^2 l} = \frac{m}{\pi R^2 l} \cdot 2\pi l \cdot r \cdot dr$

$$\rightarrow dm = \frac{2m \cdot r \cdot dr}{R^2} \rightarrow I = \int_0^R d \cdot m \cdot r^2 = \int_0^R \frac{2m \cdot r \cdot dr \cdot r^2}{R^2} = \boxed{\frac{m \cdot R^2}{2}}$$

Momento de inercia (pt.2)

Momento de inercia de uma esfera



$$dV = \pi \cdot y^2 \cdot dx \rightarrow R^2 = x^2 + y^2 \therefore y^2 = R^2 - x^2$$

"cilindro diferencial"

$$\rho = \frac{3m}{4\pi R^3} = \frac{dm}{dV} \therefore dm = \frac{3m}{4\pi R^3} \pi \cdot y^2 dx \rightarrow$$

$$\rightarrow dI = \frac{dm \cdot y^2}{2} \therefore dI = \frac{3m}{8R^3} y^4 \cdot dx = \frac{3m(R^2 - x^2)^2 dx}{8R^3}$$

$$\rightarrow \int I = \int \frac{3m}{8R^3} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx \rightarrow I = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx \rightarrow$$

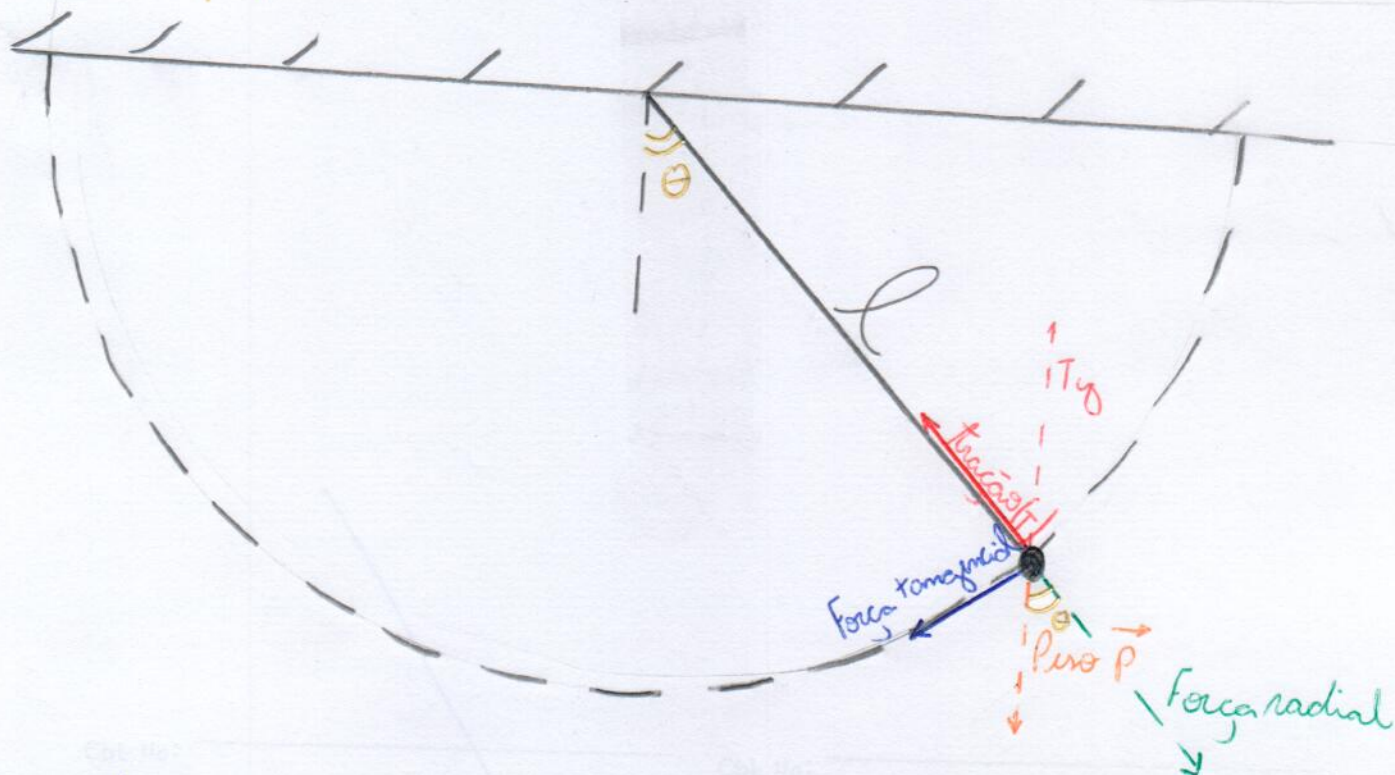
$$\rightarrow I = \frac{3m}{8R^3} \left(R^4 x \Big|_{-R}^R - 2R^2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^R + \frac{x^5}{5} \Big|_{-R}^R \right) = \frac{3m}{8R^3} \left(2R^5 - \frac{4R^5}{3} + \frac{2R^5}{5} \right)$$

$$\rightarrow I = \frac{3m}{8R^3} \left(\frac{30 \cdot R^5 - 20 \cdot R^5 + 6 \cdot R^5}{15} \right) = \frac{3m}{8R^3} \frac{16 \cdot R^5}{15} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{I = \frac{2m \cdot R^2}{5}}$$

Modulo simples

θ é pequeno



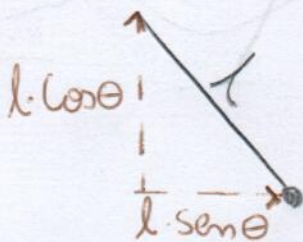
Força tangencial (F_{tan}): $-T \cdot \text{sen} \theta$

Força radial (F_{rad}): $P - T \text{cos} \theta \therefore mg - T \text{cos} \theta$

Como $F = m \cdot a$ e $a = \frac{d^2 S}{dt^2}$; portanto \longrightarrow

$\longrightarrow F_{tan} = m \cdot \ddot{x} = -T \text{sen} \theta$ e $F_{rad} = m \cdot \ddot{y} = mg - T \text{cos} \theta$

O fio pode ser representado por:



Como velocidade é $\frac{dS}{dt}$, temos que $v(x) = \frac{dx}{dt} = l \cdot \text{cos} \theta \cdot \dot{\theta}$

e $v(y) = \frac{dy}{dt} = l \cdot (-\text{sen} \theta) \cdot \dot{\theta}$

Pêndulo simples (pt. 2)

Como $V(x) = l \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}$ e $V(y) = -l \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}$ podemos encontrar a aceleração.

$$\text{Como } a = \frac{dV}{dt} \rightarrow \begin{cases} a(x) = \frac{dV(x)}{dt} = -l \sin \theta \dot{\theta}^2 + l \cos \theta \ddot{\theta} \\ a(y) = -l \cos \theta \dot{\theta}^2 - l \sin \theta \ddot{\theta} \end{cases}$$

Como $F_{\text{tan}} = -T \cdot \sin \theta$ e $F_{\text{rad}} = m \cdot g - T \cdot \cos \theta$, temos que:

$$T = \frac{-F_{\text{tan}}}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad T = \frac{(F_{\text{rad}} - m \cdot g)}{\cos \theta}, \quad \text{igualando}$$

$$\frac{-F_{\text{tan}}}{\sin \theta} = \frac{m \cdot g - F_{\text{rad}}}{\cos \theta} \quad \therefore \quad \boxed{-F_{\text{tan}} \cos \theta = m \cdot g \sin \theta - F_{\text{rad}} \cdot \sin \theta}$$

Como $F_{\text{tan}} = m \cdot a(x)$ e $F_{\text{rad}} = m \cdot a(y)$ se substituirmos:

$$-m \cdot (-l \sin \theta \dot{\theta}^2 + l \cos \theta \ddot{\theta}) \cdot \cos \theta - m \cdot g \sin \theta = m \cdot (-l \cos \theta \dot{\theta}^2 - l \sin \theta \ddot{\theta}) \cdot \sin \theta$$

$$m \cdot l \cdot \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - l \cdot m \cdot \cos^2 \theta \ddot{\theta} = m \cdot g \sin \theta + (l \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + l \sin^2 \theta \ddot{\theta}) \cdot m$$

$$-l \cdot m \cdot \cos^2 \theta \ddot{\theta} = m \cdot g \sin \theta + l \cdot m \cdot \sin^2 \theta \ddot{\theta} \rightarrow$$

$$\rightarrow -l \cdot \cos^2 \theta \ddot{\theta} = g \sin \theta + l \cdot \sin^2 \theta \ddot{\theta} \rightarrow$$

$$\rightarrow -l \cdot \cos^2 \theta \ddot{\theta} - l \cdot \sin^2 \theta \ddot{\theta} = g \sin \theta \rightarrow$$

$$\rightarrow -l \cdot \ddot{\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = g \sin \theta \rightarrow \boxed{-l \cdot \ddot{\theta} = g \sin \theta}$$

$$\text{Como } -l \cdot \ddot{\theta} = g \sin \theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g \sin \theta}{l} \quad \therefore \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g \sin \theta}{l} = 0}$$

Fazendo a expansão de seno temos que:

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots, \text{ portanto para}$$

$$\hat{\text{Ângulos pequenos}} \sin \theta = \theta, \quad \therefore \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g \cdot \theta}{l} = 0}$$

Pêndulo simples (pt 3)

Como $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta$, se substituirmos $\theta = A \cdot e^{\lambda t}$

temos que: $\theta = A \cdot e^{\lambda t} \therefore \frac{d\theta}{dt} = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t} \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = \lambda^2 \cdot A \cdot e^{\lambda t}$

portanto $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0 \rightarrow \lambda^2 \cdot A \cdot e^{\lambda t} + \frac{g}{l} \cdot A \cdot e^{\lambda t} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow A \cdot e^{\lambda t} \left(\lambda^2 + \frac{g}{l} \right) = 0$; Como $A \cdot e^{\lambda t} = \theta \therefore \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
* $\theta \neq 0$

$\rightarrow \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0 \therefore \lambda^2 = -\frac{g}{l} \rightarrow \lambda = \sqrt{-\frac{g}{l}} \therefore \lambda = \sqrt{\frac{g}{l}} i$

Como $\theta = A \cdot e^{\lambda t} \rightarrow \theta = A \cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t}$ ou $\theta = A \cdot e^{+i\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t}$

$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \dots \therefore e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right)$

Nas séries de Taylor temos que $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$

e $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$

Portanto $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Então $\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$ é um ângulo. Podemos substituir por ϕ

então ficamos com $\theta = A \cdot e^{i\phi}$ ou $\theta = A \cdot e^{-i\phi}$

Pêndulo simples (pt. 4)

Como $\theta = A \cdot e^{i\phi}$ ou $\theta = A \cdot e^{-i\phi}$, podemos manipular de forma que:

$$A_A = \frac{A \cdot e^{i\phi}}{2} \quad \text{e} \quad A_B = \frac{A \cdot e^{-i\phi}}{2}$$

Se colocarmos θ em função do tempo, temos que:

$$\theta(t) = A_A \cdot e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

$$\theta(t) = A_A \cdot e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + A_B \cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}, \quad \text{substituindo } A_A \text{ e } A_B$$

$$\theta(t) = A \cdot e^{i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)} + A \cdot e^{-i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)}$$

$$\text{Como } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{e} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Se adicionarmos as expressões temos que:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \therefore \quad \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2} = \cos\theta$$

Se juntarmos: $\theta(t) = \frac{(e^{i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)} + e^{-i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)})}{2}$

$$\theta(t) = A \cdot e^{i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)} + A \cdot e^{-i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)}$$

$$\rightarrow \theta(t) = A \cdot \left(\frac{e^{i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)} + e^{-i(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)}}{2} \right) \sim \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi)$$

$$\rightarrow \theta(t) = A \cdot \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi)$$

Penchulo simples (p.e. 5)

Na equação $\theta(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi\right)$; temos o termo;

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$$

O fato de estar em função do t confirma que:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega$$

De uma forma temos que o período (T) é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \therefore T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como a frequência é o inverso de T :

$$F = 2\pi \cdot \omega \therefore F = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$\theta(t)$ represente a elongação, portanto

$$\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \rightarrow$$

$$\rightarrow X = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad ; \text{ se derivarmos temos:}$$

$$\frac{dx}{dt} = V = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad ; \text{ se derivarmos:}$$

$$\frac{dV}{dt} = a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

GASORUM

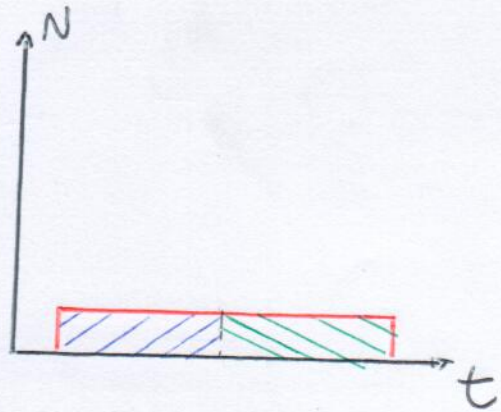
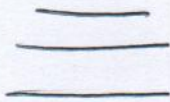
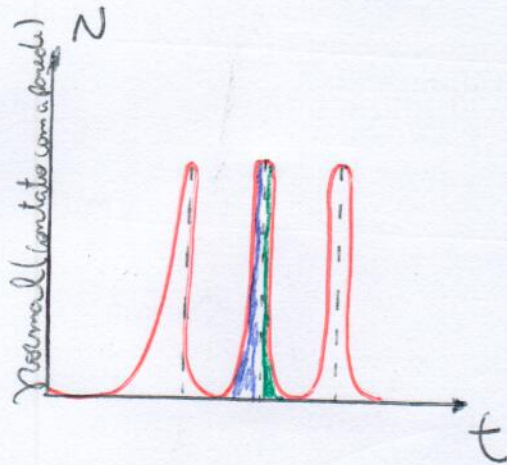
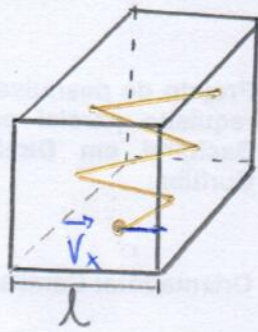


Gases

Gás ideal

- Condições de baixa densidade (Baixa pressão e alta temperatura)
- Suas partículas realizam colisões perfeitamente elásticas
- O momento de suas partículas é caótico
- O volume de suas partículas é desprezível quando comparado com o volume do recipiente

Teoria cinética



$$\text{Pressão} = \frac{\text{Força}}{\text{área}} \rightarrow p = \frac{\bar{N}}{\text{área}}$$

Teoria cinética dos gases (pt. 2)

Teorema do impulso:

$$\bar{N} \cdot \Delta t = \Delta Q_x \rightarrow \bar{N} \cdot \frac{2l}{v_x} = m_x \cdot v_x - m_x(-v_x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{N} \frac{2 \cdot l}{v_x} = 2 v_x m_x \rightarrow \bar{N} \cdot l = m_x \cdot v_x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{N} = \frac{m_x \cdot v_x^2}{l} \rightarrow \frac{\bar{N}}{\text{área}} = P_0 \rightarrow P_0 = \frac{\bar{N}}{A} = \frac{m_x v_x^2}{\underbrace{l \cdot A}_{\text{Volume}}}$$

$$\rightarrow P_{\text{total}} = N_{\text{mols}} \cdot P_x = \frac{N \cdot m_x \cdot v_x^2}{V} \rightarrow P_{\text{total}} = \frac{m \cdot v_x^2}{V} = P_0$$

$$\rightarrow \boxed{P \cdot V = m \cdot v_x^2}$$

* Como o movimento é browniano

$$v_{\text{res}}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3 v_x^2 \rightarrow v_x^2 = \frac{v^2}{3} //$$

$$\frac{3}{2} P \cdot V = \frac{m \cdot v^2}{2} = \text{Energia cinética}$$

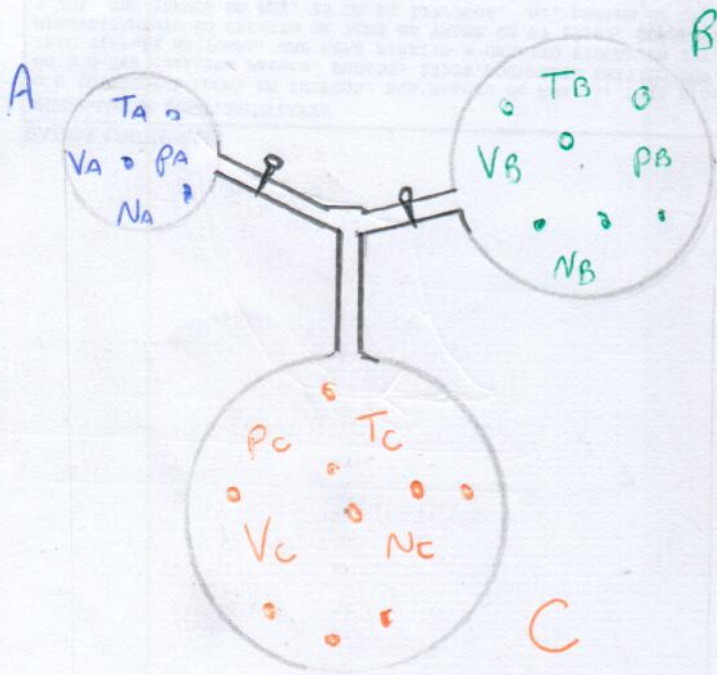
$$\boxed{P \cdot V = n \cdot R \cdot T}$$

$$\text{Energia interna (U)} = \frac{3}{2} \cdot P \cdot V \rightarrow \boxed{U = \frac{3}{2} n R T}$$

$$\frac{3}{2} n R T = \frac{m \cdot v^2}{2} \rightarrow 3 \frac{n}{\bar{N}} R T = m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{3 R T}{\bar{M}}}}$$

Mistura Gasosa

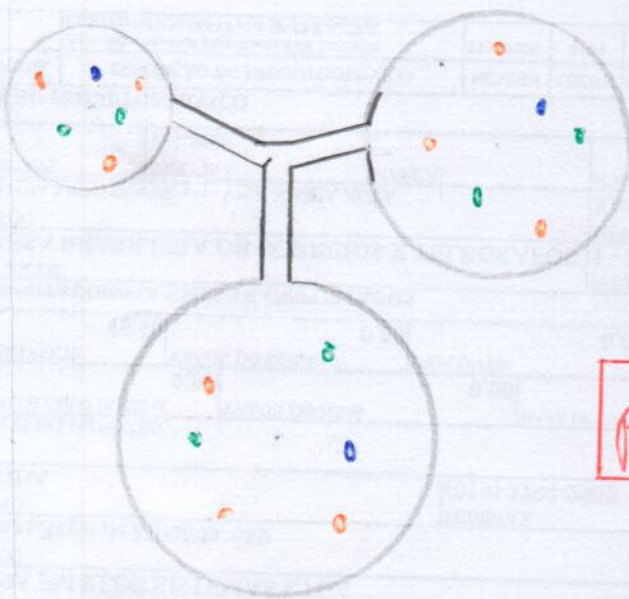


Antes da mistura

$$* p_A \cdot V_A = N_A \cdot R \cdot T_A$$

$$* p_B \cdot V_B = N_B \cdot R \cdot T_B$$

$$* p_C \cdot V_C = N_C \cdot R \cdot T_C$$



Após mistura

$$* V_{mistura} = V_A + V_B + V_C$$

$$* N_{mist} = N_A + N_B + N_C$$

$$p_{mist} \cdot V_{mist} = N_{mist} \cdot R \cdot T_{mist}$$

Lei das pressões parciais

A pressão parcial exercida por um elemento da mistura é aquela que o elemento exerciria se ocupasse sozinho o volume da mistura e na temperatura da mistura

$$p_A' \cdot V_{mist} = N_A \cdot R \cdot T_{mist}$$

$$\frac{p_A'}{p_{mist}} \equiv \frac{N_A}{N_{mist}}$$

$$p_B' \cdot V_{mist} = N_B \cdot R \cdot T_{mist}$$

$$\frac{p_B'}{p_{mist}} \equiv \frac{N_B}{N_{mist}}$$

$$p_C' \cdot V_{mist} = N_C \cdot R \cdot T_{mist}$$

$$\frac{p_C'}{p_{mist}} \equiv \frac{N_C}{N_{mist}}$$

Gases "Reais"

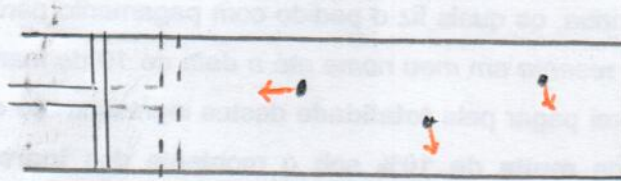
Fator de Compressibilidade (Z)

$$Z = \frac{\bar{V}_{\text{real}}}{\bar{V}_{\text{ideal}}}$$

$$Z = \frac{p \cdot V}{n \cdot R \cdot T}$$

* se $Z > 1$

Como $Z = \frac{p \cdot V}{n \cdot R \cdot T}$, se $Z > 1$, em um sistema em que $p = \text{cte}$ e $T = \text{cte}$ um aumento deve-se a variação de volume, que é > 0 .

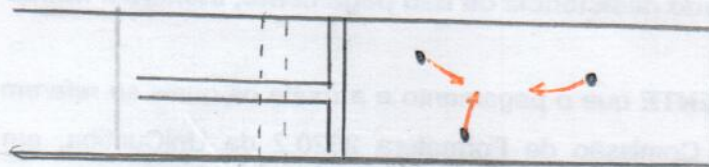


* Para o volume estar aumentando, uma repulsão entre os átomos está ocorrendo.

* Devido à repulsão, as moléculas colidem com maior intensidade nas paredes, devido a este fenômeno de repulsão, comprimir o gás é mais difícil.

* se $Z < 1$

Como $Z = \frac{p \cdot V}{n \cdot R \cdot T}$, se $Z < 1$, há diminuição de volume.



* Para o volume estar diminuindo, uma atração entre as moléculas está ocorrendo.

* Devido à atração, as moléculas colidem com menor intensidade nas paredes, fazendo com que a sua compressão seja fácil.

* Moléculas como o H e o He, que possuem baixíssimas forças intermoleculares, possuem um fator de compressibilidade altos.

Gases "reais" (pt. 2)

* Correções ao limite de gás ideal usando a equação de virial:

Essa condição é válida para pequenas densidades da condição de gás ideal

Além disso que para gases ideais $P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$

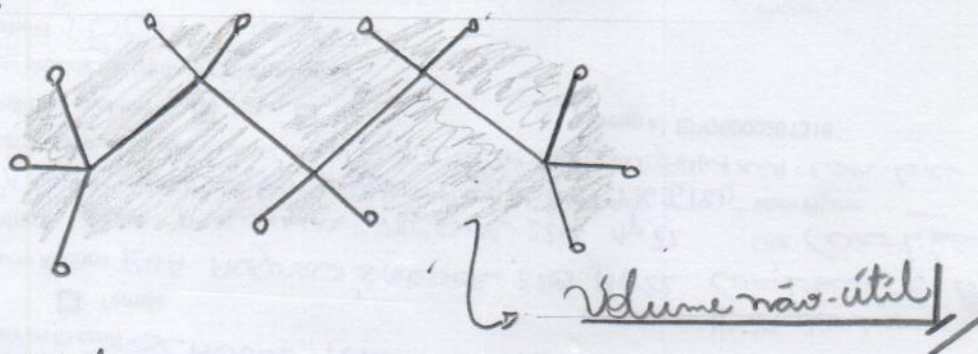
→ Para a equação virial → $P_{\text{real}} \cdot V_{\text{molar}} = R \cdot T \left(1 + \frac{B}{V_{\text{molar}}} + \frac{C}{V_{\text{molar}}^2} + \frac{D}{V_{\text{molar}}^3} + \dots \right)$

B, C, D, ... são coeficientes para "corrigir" as interações entre as moléculas

B é o coeficiente para 2 moléculas, C para 3; D para 4; ...

* Correções de Van der Waals no volume

* Cada molécula possui um determinado formato, tamanho e volume. Devido a estes formatos, além do volume da própria molécula um volume não útil se faz presente.



Van der Waals propôs um coeficiente de correção, de forma que fosse válido a aproximação com o gás ideal

$$V_{\text{real}} = V_{\text{ideal}} - n \cdot b \quad \therefore \quad P \cdot V = nRT \text{ fica } \boxed{p \cdot (V - nb) = n \cdot R \cdot T}$$

↳ Coeficiente

Correções de Van der Waals na pressão:

Foi visto que a atração entre as moléculas reduz a pressão

Como o efeito de atração $\propto \frac{n^2}{V^2}$; temos que →

$$\rightarrow \boxed{\text{Efeito de atração} = a \cdot \frac{n^2}{V^2}} \quad \therefore \quad \boxed{\text{Pressão ideal} = P_{\text{real}} + a \cdot \frac{n^2}{V^2}}$$

→ a = Coeficiente de correção.

Gases "Reais" (pt. 3)

Continuação de correção de Van der Waals:

$$\text{Como } p_{\text{ideal}} = p_{\text{real}} + a \cdot \frac{n^2}{V^2} \quad \text{e } Z = \frac{p \cdot V}{n \cdot R \cdot T}$$

$$\left(p + a \cdot \frac{n^2}{V^2} \right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(p + a \cdot \frac{n^2}{V^2} \right) = \frac{n \cdot R \cdot T}{(V - n \cdot b)} \quad \therefore \boxed{p = \frac{n R T}{(V - n b)} - \frac{a \cdot n^2}{V^2}}$$

$$\longrightarrow Z = \left(\frac{1}{1 - \frac{n b}{V}} \right) - \frac{a \cdot n}{R \cdot T \cdot V} \quad \longrightarrow \boxed{Z = \left[\frac{n \cdot R \cdot T}{(V - n b)} - \frac{a \cdot n^2}{V^2} \right] \cdot V_{\text{real}}}$$

Analisando Z , temos:

$$Z = \left[\frac{n \cdot R \cdot T}{(V - n b)} - \frac{a \cdot n^2}{V^2} \right] \cdot V_{\text{real}}$$

* Se " b " diminui e " a " aumenta $Z < 1$, portanto a atração é favorecida

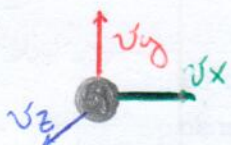
* Se " b " aumenta e " a " diminui, $Z > 1$, portanto a repulsão é favorecida

Teorema da equipartição de Maxwell

Cada grau de liberdade das partículas que compõem um gás representa uma parcela de energia de:

$$\frac{nRT}{2}$$

Para um gás monoatômico



$$f = 3 \therefore U = \frac{3}{2} nRT$$

Para um gás biatômico ou moléculas lineares



$$f = 5 \therefore U = \frac{5}{2} nRT$$

Para gases poliatômicos

O teorema da equipartição de Maxwell não funciona

Calor molar a volume constante



$$Q_V = m \cdot c_{v} \cdot \Delta T$$

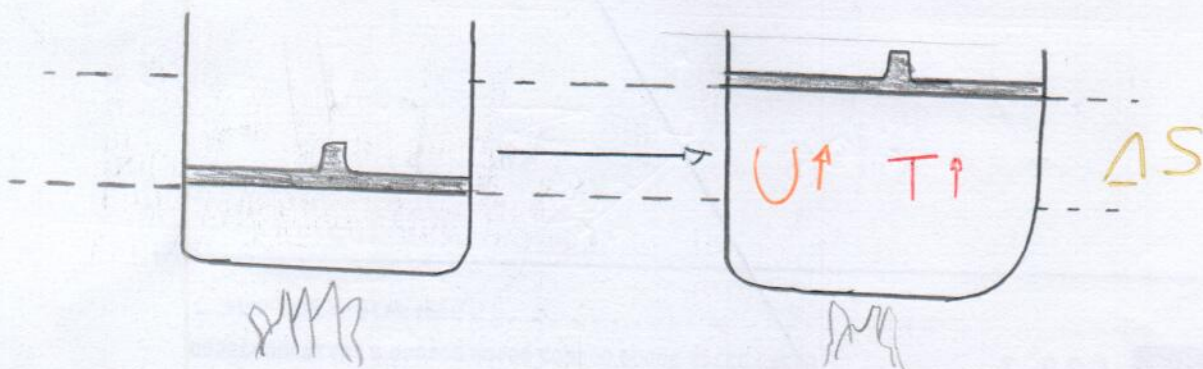
↳ Calor específico a volume = cte

Como $m = n \cdot \bar{M} \rightarrow Q_V = n \cdot \bar{M} \cdot c_v$

Calor molar $_V = c_{v,e}$

$$Q_V = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

Calor molar a pressão constante



* Ocorre variação de volume \therefore existe (Z/W)

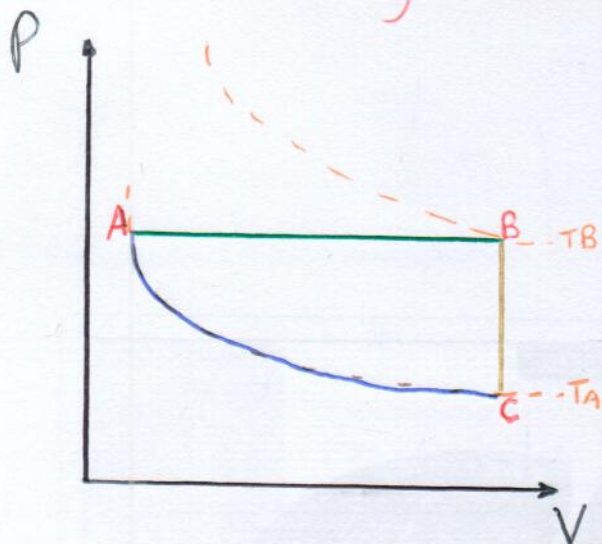
$$Q_P = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

Como $m = n \cdot \bar{M} \rightarrow Q_P = n \cdot \bar{M} \cdot c_p \cdot \Delta T$

Calor molar $_P = c_{p,e}$

$$Q_P = n \cdot C_p \cdot \Delta T$$

Relações de Mayer



* A-C → Processo isotérmico

* A-B → Processo isobárico

* B-C → Processo isométrico

$$\Delta U_{AB} = \cancel{\Delta U_{AC}} + \Delta U_{CB}$$

Variáveis de energia interna

$$U = f \cdot \frac{n \cdot R \cdot T}{2} \rightarrow \Delta U = U - U_0 \rightarrow \Delta U = f \cdot \frac{n \cdot R \cdot (T - T_0)}{2}$$

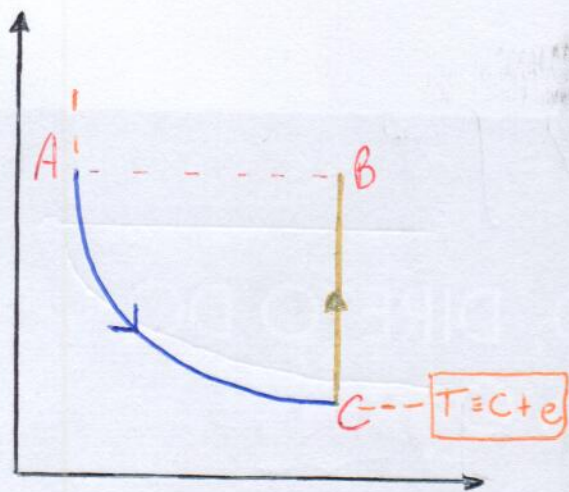
* Como $Q_{AB} - W_{AB} = Q_{CB} - W_{CB} \rightarrow n \cdot C_p \cdot \Delta T_{AB} - p \cdot \Delta V_{AB} = n \cdot C_v \cdot (T_B - T_A) \rightarrow$

$$\rightarrow n \cdot C_p \cdot (T_B - T_A) - p \cdot (V_B - V_A) = n \cdot C_v \cdot (T_B - T_A) \quad * \text{ Como } p \cdot V = n \cdot R T$$

$$\rightarrow \cancel{n \cdot C_p \cdot (T_B - T_A)} - \cancel{n \cdot R \cdot (T_B - T_A)} = \cancel{n \cdot C_v \cdot (T_B - T_A)} \rightarrow C_p - R = C_v //$$

$$\boxed{C_p - C_v = R} \quad \therefore C_p > C_v //$$

Variación de energía interna (ΔU)



+ Isotérmico. $T_A = T_C = cte$

* Isovolúmico. $V_C = V_B = cte$

$$\Delta U_{AB} = \cancel{\Delta U_{AC}} + \Delta U_{CB}$$

+ Como el proceso CB es isovolúmico:

$$\Delta U_{CB} = Q_{CB} - W_{CB} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Delta U_{AB} = Q_{CB} \longrightarrow \Delta U_{AB} = n \cdot C_v \cdot (T_B - T_C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\Delta U = n \cdot C_v \cdot \Delta T}$$

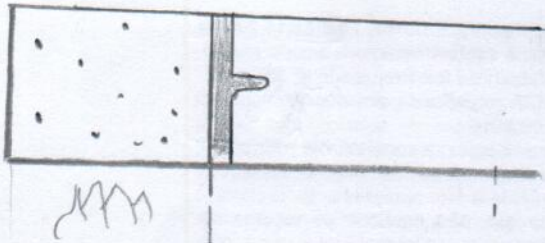
$$\text{hoy: } n \cdot C_v \cdot \Delta T = f \cdot \frac{n \cdot R \cdot \Delta T}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{C_v = f \cdot \frac{R}{2}} \quad * \text{ Como } C_p - R = C_v \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_p - R = f \cdot \frac{R}{2} \longrightarrow C_p = f \cdot \frac{R}{2} + R$$

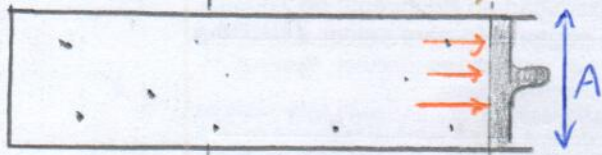
$$C_p = f \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot R \Rightarrow \boxed{C_p = f \cdot \frac{3}{2} \cdot R}$$

Trabalho de um gás



$$W = \int_{V_0}^{V_F} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Como $\vec{F} = p \cdot \vec{A}$

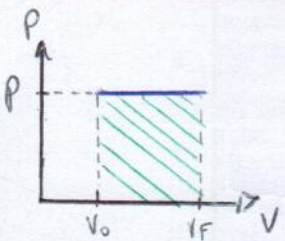


$$W = \int_{V_0}^{V_F} p \cdot A \cdot d\vec{S}$$

volume

$$W = \int_{V_0}^{V_F} p \cdot dV$$

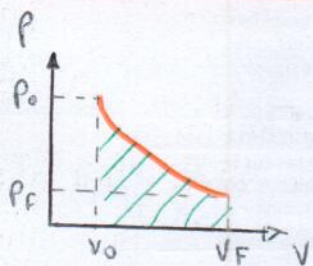
Trabalho isobárico $p = c + e$



$$W = \int_{V_0}^{V_F} p \cdot dV \rightarrow p \int_{V_0}^{V_F} dV = pV \Big|_{V_0}^{V_F} = p \cdot (V_F - V_0)$$

$$W = p \cdot \Delta V$$

Trabalho isotérmico $p \cdot V = c + e$ $T = c + e$



$$p_0 \cdot V_0 = p_F \cdot V_F = c + e = k \rightarrow p \cdot V = k \therefore p = \frac{k}{V}$$

$$\text{Como } T_A = T_B \rightarrow W = \int_{V_0}^{V_F} p \cdot dV = \int_{V_0}^{V_F} \frac{k}{V} \cdot dV$$

$$\rightarrow W = k \int_{V_0}^{V_F} \frac{1}{V} dV \rightarrow W = k \cdot \ln(V) \Big|_{V_0}^{V_F}$$

$$\rightarrow W = p \cdot V \cdot \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right)$$

$$\text{Como } p \cdot V = nRT \rightarrow W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right)$$

Processo Adiabático

Não ocorre troca de calor com o meio externo

$$Q = W + \Delta U \rightarrow dQ = dW + dU$$

* Como o processo é adiabático $Q = 0$

$$0 = dW + dU \rightarrow W = \int p \cdot dV + k \rightarrow dW = p \cdot dV //$$

$$\Delta U = U - U_0 = n \cdot C_v (T - T_0) \rightarrow U = U_0 - n C_v T_0 + n C_v T$$

$$U = n C_v T \rightarrow \frac{dU}{dT} = n \cdot C_v \rightarrow dU = n \cdot C_v \cdot dT //$$

$$0 = p \cdot dV + n C_v dT$$

* Lei de Clapeyron $\rightarrow p \cdot V = n R T \rightarrow V d p + p d V = n R d T \rightarrow$

$$\rightarrow n \cdot dT = \frac{V d p + p \cdot dV}{R} \sim \text{Substituindo na}$$

$$0 = p dV + C_v \frac{(V d p + p dV)}{(C_p - C_v)} \rightarrow p \cdot d \cdot V \cdot C_p - p \cdot d \cdot V (C_v + C_v V d p + p d V)$$

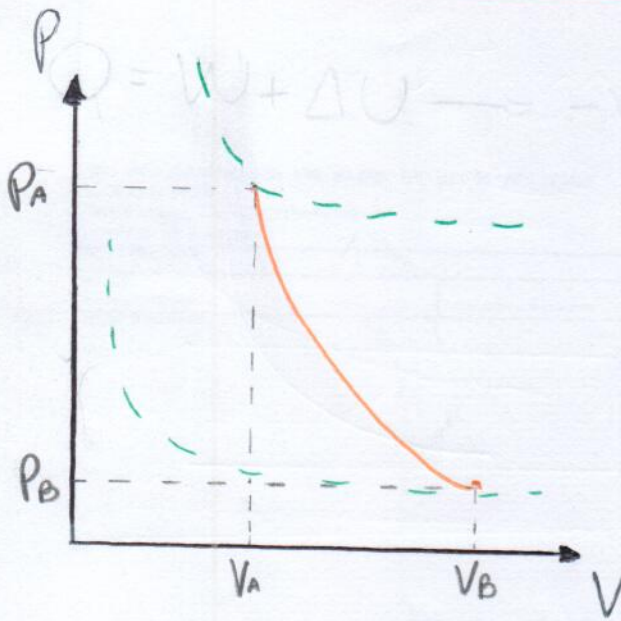
$$\rightarrow C_p \cdot p \cdot dV = - C_v \cdot V \cdot dP \rightarrow - \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{1}{V} dV = \frac{1}{P} dP \rightarrow$$

$$\rightarrow -\gamma \int_{V_0}^{V_F} \frac{1}{V} dV = \int_{P_0}^{P_F} \frac{1}{P} dP \rightarrow -\gamma \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{P_F}{P_0}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right)^{-\gamma} = \ln\left(\frac{P_F}{P_0}\right) \rightarrow \left(\frac{V_F}{V_0}\right)^{-\gamma} = \frac{P_F}{P_0} \rightarrow \frac{V_0^\gamma}{V_F^\gamma} = \frac{P_F}{P_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{P_F \cdot V_F^\gamma = P_0 \cdot V_0^\gamma}$$

Trabalho em um processo adiabático



$$0 = W + \Delta U \rightarrow -W = \Delta U //$$

$$W_{AB} = -(n \cdot C_v \cdot \Delta T) \therefore W_{AB} = -n C_v (T_B - T_A)$$

$$\rightarrow W_{AB} = n C_v (T_A - T_B) //$$

* Sabendo que $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$:

$$\rightarrow C_p = \gamma \cdot C_v; \text{ como } C_p - C_v = R \rightarrow \gamma C_v - C_v = R \rightarrow$$

$$\rightarrow C_v (\gamma - 1) = R \rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \rightarrow W = \frac{n R (T_A - T_B)}{(\gamma - 1)}$$

$$\rightarrow W_{AB} = \frac{p_A \cdot V_A - p_B \cdot V_B}{(\gamma - 1)} \rightarrow \boxed{W = \frac{p_o V_o - p_f V_f}{(\gamma - 1)}}$$

* Outra forma:

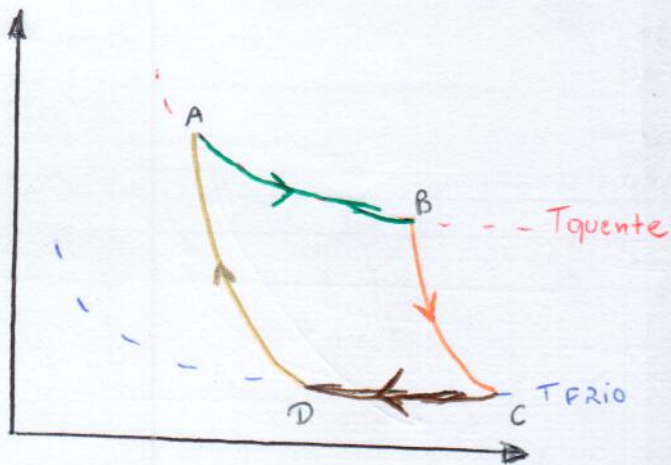
$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{k}{V^\gamma} \cdot dV = k \int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{V^\gamma} \cdot dV = k \cdot \int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma} \cdot dV \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{AB} = \frac{k}{(1-\gamma)} \cdot \frac{1}{V^{\gamma-1}} \Big|_{V_A}^{V_B} \rightarrow W_{AB} = \frac{p_A \cdot V_A^\gamma}{(1-\gamma)} \left(\frac{1}{V_B^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_A^{\gamma-1}} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{AB} = \frac{p_A \cdot V_A^\gamma}{(\gamma-1)} \cdot \left(\frac{V_A}{V_A^\gamma} - \frac{V_B}{V_B^\gamma} \right)$$

$$\boxed{* p_A \cdot V_A^\gamma = p_B \cdot V_B^\gamma = Cte}$$

Maquina de Carnot



* Processo isotérmico A → B

* Processo isotérmico: C → D

* Processo adiabático: B → C

* Processo adiabático: D → A

• $Q_{BC} = 0$ (adiabático)

• $Q_{DA} = 0$ (adiabático)

• $Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U$ (processo isotérmico) → $W_{AB} > 0$ (volume aumenta)

• $Q_{CD} = W_{CD} + \Delta U$ (processo isotérmico) → $W_{CD} < 0$ (volume diminui)

Rendimentos

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{Frio}|}{|Q_{quente}|} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}}$$

* $Q_{CD} = n \cdot R \cdot T_{Frio} \cdot \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0 \rightarrow Q_{CD} = -n \cdot R \cdot T_{Frio} \left(\frac{V_C}{V_D}\right) \rightarrow$

→ $|Q_{CD}| = n \cdot R \cdot T_{Frio} \cdot \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$

→ $Q_{AB} = n \cdot R \cdot T_{quente} \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \rightarrow |Q_{AB}| = n \cdot R \cdot T_{quente} \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

Como $T_A = T_B \rightarrow P_A V_A = P_B V_B$ e $T_C = T_D \rightarrow P_C V_C = P_D V_D$

* Como tem processos adiabáticos: $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma \sim P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma$

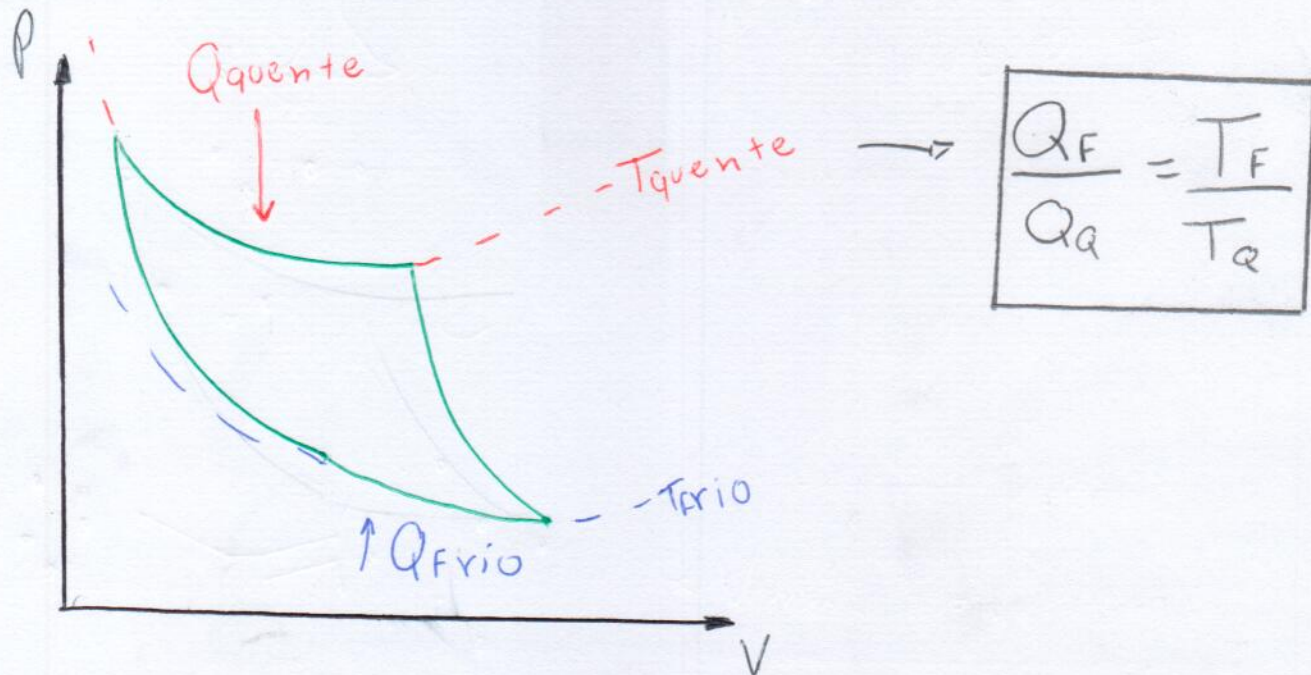
$$\frac{P_B V_B^\gamma}{P_A V_A^\gamma} = \frac{P_C V_C^\gamma}{P_D V_D^\gamma} \rightarrow \frac{P_B}{P_A} = \frac{V_A}{V_B} \quad ; \quad \frac{P_C}{P_D} = \frac{V_D}{V_C} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} \cdot \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = \frac{V_D}{V_C} \cdot \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma \rightarrow$$

→ $\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \cdot \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) \therefore \eta = 1 - \frac{n \cdot R \cdot T_{Frio} \cdot \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{n \cdot R \cdot T_{quente} \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} \rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_{Frio}}{T_{quente}}}$

Entropia (pt. 1)

Em qualquer ciclo termodinâmico "ideal" está em equilíbrio, portanto sua entropia é representada como um ciclo reversível, portanto a variação de entropia é 0.

Imo fica claro ao observar o ciclo de Carnot.

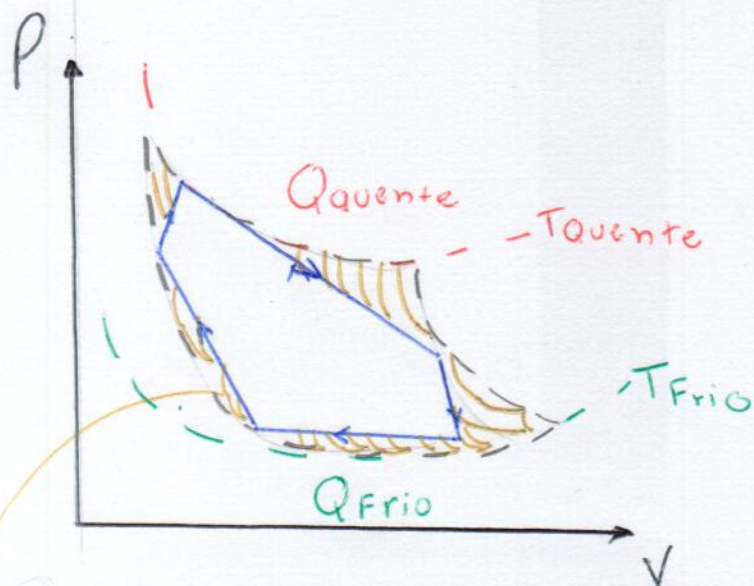


$$\left. \begin{array}{l} |Q_Q| = Q_H \\ |Q_F| = -Q_F \end{array} \right\} -\frac{Q_F}{Q_Q} = \frac{T_F}{T_Q} \rightarrow -\frac{Q_Q}{T_Q} = \frac{Q_F}{T_F} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_Q}{T_Q} = 0 \quad \therefore \quad \Delta S_{\text{ciclo}} = 0$$

Entropia (pt. 2)

Para um processo cíclico qualquer



↑ Q_{quente}
Ciclos de Carnot "infinitesimais."

$$\frac{\Delta Q_{Q1}}{T_{F1}} + \frac{\Delta Q}{T_{F2}} = 0 \quad ; \quad \frac{\Delta Q_{Q2}}{T_{Q2}} + \frac{\Delta Q_{F2}}{T_{F2}} = 0 \dots \frac{\Delta Q_{QN}}{T_{QN}} + \frac{\Delta Q_{FN}}{T_{FN}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_{Qi}}{T_{Qi}} + \sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_{Fi}}{T_{Fi}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^N \lim \frac{\Delta Q_{Fi}}{T_{Fi}} + \sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_{Qi}}{T_{Qi}} = 0}$$

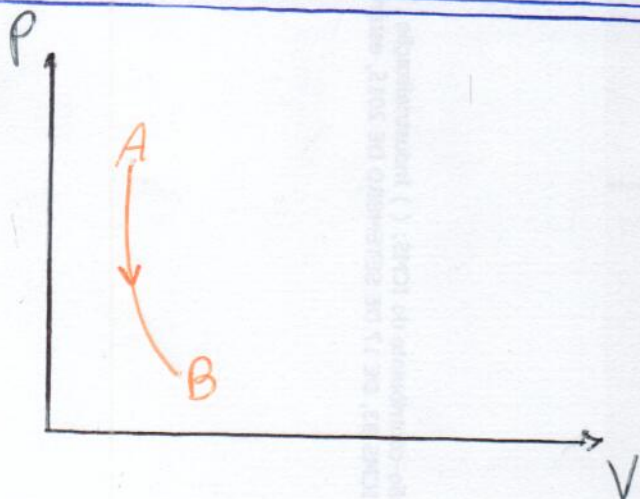
$$\int \frac{dQ_Q}{T} + \int \frac{dQ_F}{T} = 0 \quad \therefore \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{T} = dS$$

$$\rightarrow \int_0^F dS = \int_0^F \frac{dQ}{T} \rightarrow S_B - S_A = \int_0^F \frac{dQ}{T} \rightarrow \boxed{\Delta S = \int_0^F \frac{dQ}{T}}$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{q_{reversível}}{T}}$$

Variacões de Entropia (p. 3)

* Processo adiabático reversível (Isentrópico)

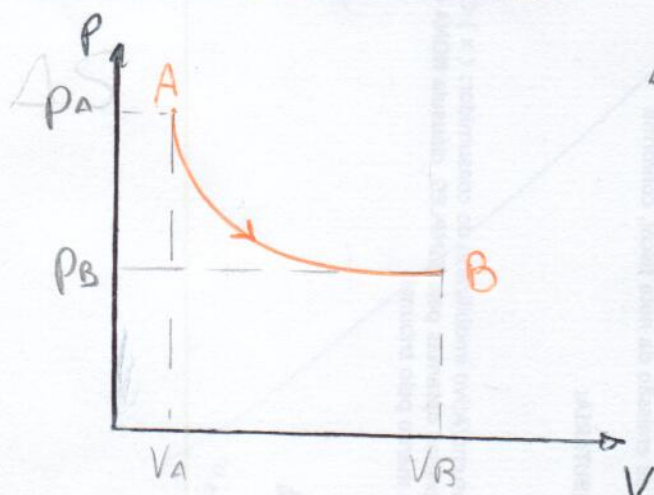


$$p \cdot V^\gamma = \text{cte}$$

$$* Q_{AB} = 0 \therefore \Delta S_{AB} = 0$$

$$\boxed{S_A = S_B = \text{cte}}$$

* Processo isotérmico



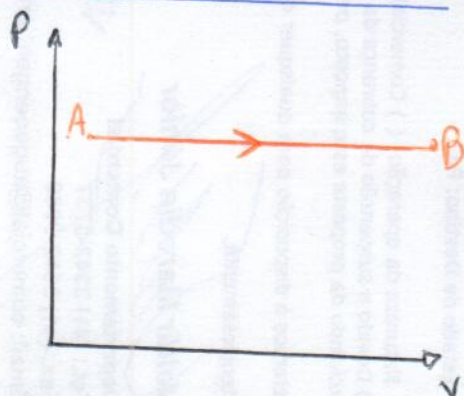
$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B dQ \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T}}$$

$$* \text{Como } Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U$$

$$\rightarrow W_{AB} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = Q_{AB} \therefore \boxed{\Delta S = \frac{p_A \cdot V_A}{T} \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

* Processo Isobárico



$$Q_{AB} = nC_p \cdot \Delta T_{AB} \rightarrow Q = nC_p \cdot (T_B - T_A) \rightarrow$$

$$\rightarrow Q = nC_p T_B - nC_p T_A \rightarrow \frac{dQ}{dT} = n \cdot C_p \rightarrow$$

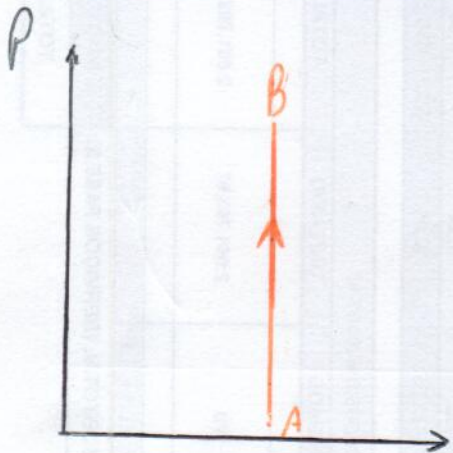
$$\rightarrow dQ = nC_p dT$$

$$\rightarrow \Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nC_p}{T} = nC_p \int_{T_A}^{T_B} \frac{1}{T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S_{AB} = nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)}$$

Variação de entropia (pt 4)

Processo isocórico



$$Q = nC_v \Delta T = nC_v (T - T_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow Q = nC_v T - nC_v T_0 \rightarrow \frac{dQ}{dT} = nC_v$$

$$\rightarrow \boxed{dQ = nC_v dT}$$

$$\rightarrow \Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{nC_v}{T} dT = nC_v \int_A^B \frac{1}{T} dT \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S_{AB} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)}$$

$$\rightarrow \Delta S_{AB} = \frac{1}{(\gamma - 1)} \cdot nR \ln\left(\frac{P_B \cdot V_B}{P_A \cdot V_A}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S_{AB} = \frac{P_A \cdot V_A}{(\gamma - 1) \cdot T_A} \cdot \ln\left(\frac{P_B \cdot V_B}{P_A \cdot V_A}\right)}$$

Mudança de fase

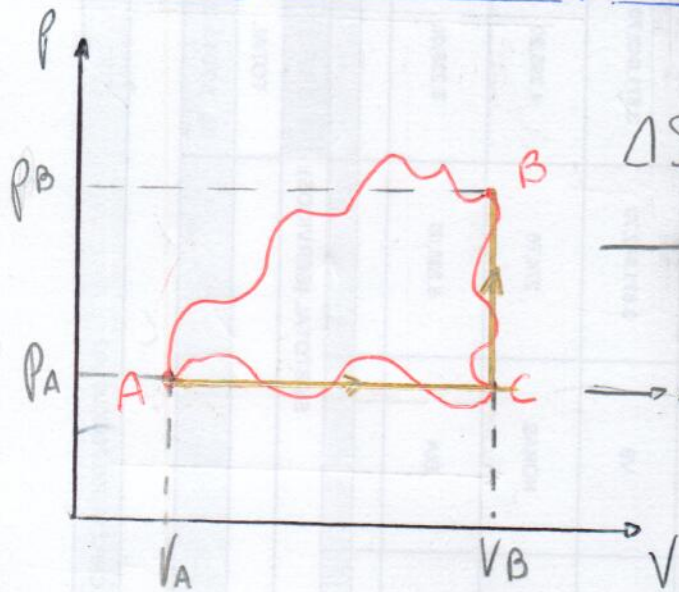
$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B dQ \rightarrow \Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T}$$

$Q_{AB} = \text{Calor latente}$

$$\boxed{\Delta S_{AB} = \frac{m \cdot L}{T}}$$

Entropia (pt. 5)

Variaco de entropia em um processo qualquer



$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{BC} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Delta S_{AB} = n C_p \cdot \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) + n C_v \cdot \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)$$

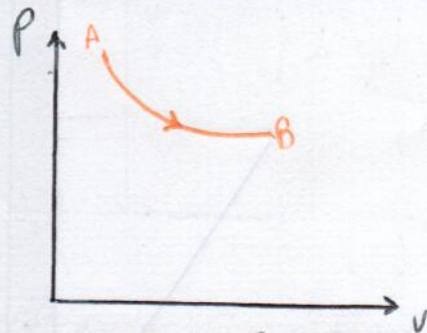
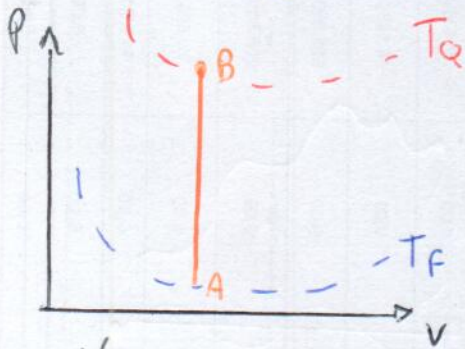
$$\longrightarrow \Delta S_{AB} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \cdot n \cdot R \cdot \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) + \frac{n R}{(\gamma-1)} \cdot \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)$$

$$\longrightarrow \Delta S_{AB} = \frac{p_A \cdot V_A}{T_A (\gamma-1)} \left[\ln\left(\frac{p_C \cdot V_C}{p_A \cdot V_A}\right)^\gamma + \ln\left(\frac{p_B \cdot V_B}{p_C \cdot V_C}\right) \right]$$

$$\longrightarrow \Delta S_{AB} = \frac{p_A \cdot V_A}{T_A (\gamma-1)} \cdot \left[\ln\left(\frac{p_B \cdot V_B^\gamma}{p_A \cdot V_A^\gamma}\right) \right]$$

Entropia (pt. 6)

Transformações isotérmica reversível e adiabática reversível



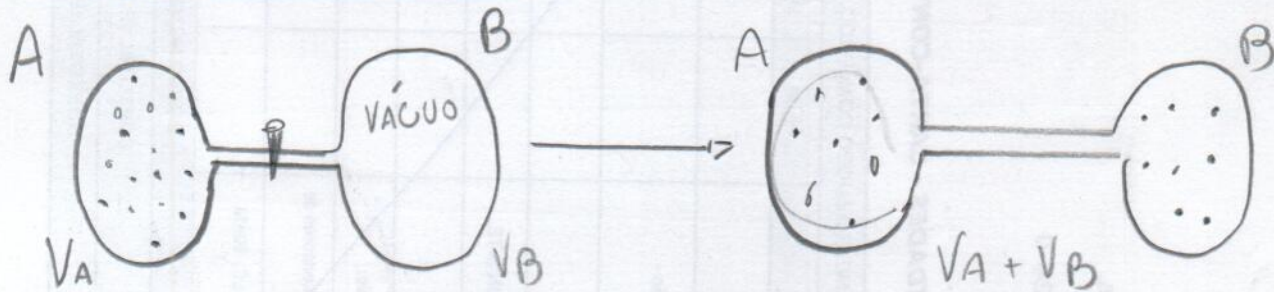
$$\Delta S = \frac{P_A \cdot V_A}{T} \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta S = n \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) //$$

$$\Delta S = n C_V \cdot \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) //$$

$$\Delta S = S_F - S_0 = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nC_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

Expansão livre



Como é no vácuo $T = cte$ e $W = 0$

sendo $T = cte$, é um processo isotérmico.

$$\Delta S = nR \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Com isso percebemos que a expansão e o aumento de temperatura de um gás é espontâneo

Entropia (pt. 7)

Equações de Boltzmann



2 possibilidades: $\therefore N=2$ / $N=2$
4 possibilidades: $\therefore N=4$ / $N=4$

$$f(N) \equiv S\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \dots\right)$$

$$\rightarrow p_k = \frac{n_k}{N} \quad * \sum_{k=1}^m n_k = N$$

↳ "probabilidade de escolher o grupo 'k'"

$$* \sum_{k=1}^m p_k f(n_k) \quad f(N) * S(p_1, \dots, p_m)$$

$$f(N) = S(p_1, \dots, p_m) + \sum_{k=1}^m p_k f(n_k)$$

Considerando $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$, $p_k = \frac{1}{m}$ para todos

$$* n \cdot m = N \quad f(N) = S\left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} f(n)$$

$$f(mn) = f(m) + f(n) \rightarrow f(m) = k \cdot \log_2 n \rightarrow$$

$$\rightarrow k \cdot \log_2 N = S(p_1, \dots, p_m) + \sum_{k=1}^m p_k \cdot k \cdot \log_2 n_k \rightarrow$$

$$\rightarrow S(p_1, \dots, p_m) = k \cdot \log_2 N - \sum_{k=1}^m p_k \cdot k \cdot \log_2 n_k =$$

Continua na próxima página

Entropia (pt (8))

Continuação da equação de Boltzmann

$$S(p_1, \dots, p_m) = K \cdot \log N - \sum_{k=1}^m p_k \cdot K \cdot \log n_k \rightarrow$$

$$\rightarrow K \sum_{k=1}^m p_k \log N - K \sum_{k=1}^m p_k \log n_k =$$

$$= K \sum_{k=1}^m p_k \log \frac{N}{n_k} = -K \sum_{k=1}^m p_k \log p_k$$

Como neste caso $p_k = \frac{1}{\Omega}$, $k = 1, 2, \dots, \Omega \dots$

$$S = -K \sum_{k=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{\Omega}\right) \log \left(\frac{1}{\Omega}\right) = K \cdot \ln \Omega$$

Então a variação de entropia:

$$\begin{cases} S_f = K \cdot \ln \Omega \\ S_0 = K \cdot \ln \Omega_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta S = K \cdot \ln \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)$$

$K =$ Constante de Boltzmann $\rightarrow K = \frac{R}{N^{\text{avogadro}}}$

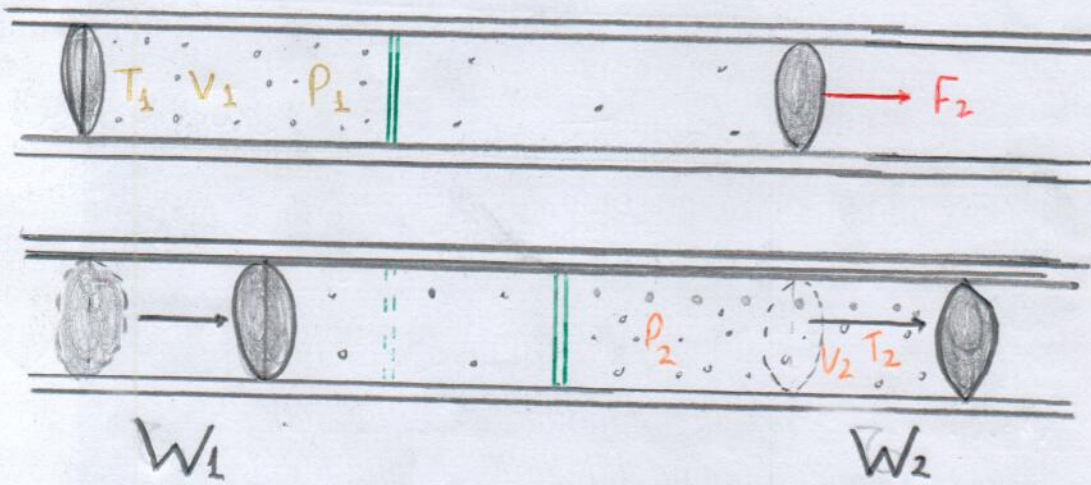
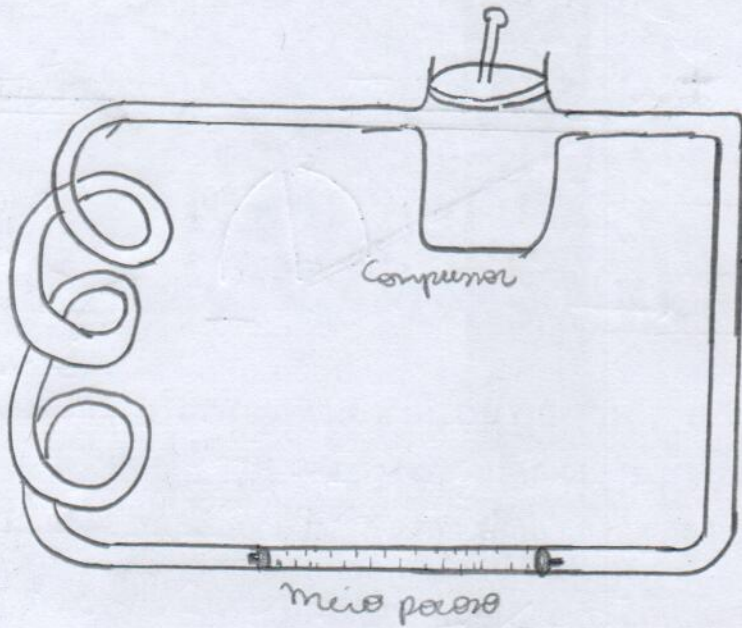
$\Omega =$ Mera relativística.

$$\Omega = \frac{1}{N! h^{3N}} \cdot \frac{\partial \tilde{\Omega}(E)}{\partial E} \cdot \Delta E \rightarrow$$

$$\rightarrow \Omega = \frac{1}{N! h^{3N}} \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}} \cdot E^{\frac{3N}{2}-1}}{\left(\frac{3N}{2} - 1\right)!} \cdot V^N \cdot \Delta E$$

Gases

Experimento de Joule-Thomson



$$W_1 = p_L(0 - V_1) \rightarrow W_1 = -p_1 \cdot V_1 \therefore W_1 < 0 // \quad U_1 = n \cdot C_v \cdot T_1 //$$

$$W_2 = p_2 \cdot (V_2 - 0) \rightarrow W_2 = p_2 \cdot V_2 \therefore W_2 > 0 // \quad U_2 = n C_v \cdot T_2 //$$

$$\text{Como } Q = W + \Delta U \rightarrow 0 = W_1 + W_2 + U_2 + U_1 \rightarrow U_1 + p_1 \cdot V_1 = U_2 + p_2 \cdot V_2$$

$$\rightarrow U_1 + p_1 \cdot V_1 = U_2 + p_2 \cdot V_2 = C + e // \rightarrow \boxed{U + p \cdot V} \text{ é Entalpia (H)}$$

$$\rightarrow H = U + p \cdot V \rightarrow dH = dU + p \cdot dV + V \cdot d p \rightarrow \text{Considerando } p = C + e$$

$$\rightarrow dH = dU + dW = dQ \rightarrow \Delta H = \Delta U + W = Q \rightarrow \text{a pressão constante} \rightarrow$$

$$\Delta U = n C_v \cdot \Delta T \rightarrow dU = n C_v \cdot dT \rightarrow \frac{dU}{dT} = n \cdot C_v \therefore \boxed{\frac{dH}{dT} = n C_p}$$

Energia livre de Helmholtz

$$H = U + p \cdot V$$

$$\Delta S = \frac{q}{T}$$

$$F = U - TS$$

* F pode ser interpretado como a energia de um sistema capaz de exercer trabalho, em temperatura T, energia interna U e entropia S.

* De certa forma é um conceito parecido com entalpia.

Para um processo isotérmico:

$$\Delta F = \Delta U - T \cdot \Delta S$$

* Se ele ocorre de forma que permaneça em equilíbrio: $\Delta F = W \therefore T \cdot \Delta S = \Delta q$

* Se ele é uma expansão livre: $T \cdot \Delta S \geq \Delta q \therefore \Delta F \leq W$

$$dF = dU - SdT - TdS \rightarrow$$

$$\rightarrow dF = -PdV - VdP - SdT + \mu \cdot dN$$

↳ a pressão é cte

$$\rightarrow \mu = k \cdot T \cdot \ln\left(\frac{\Delta^3 \cdot N}{V}\right) + k \cdot T \cdot \ln\left(\frac{1}{N \bar{T}_m}\right) \rightarrow \bar{T}_m = \frac{1}{N}$$

* Δ -> Comprimento de onda térmico de de Broglie.

* N -> Número de "lugares" que a molécula pode se posicionar

$$\rightarrow P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) ; S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) ; \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)$$

Energia livre de Helmholtz (pt. 2)

Sabendo que a entropia $i. \langle S \rangle = k_B \sum_{k=1}^m p_i \cdot k_B \cdot \log p_i N \rightarrow$

$$\rightarrow \text{se } p = \frac{1}{\Omega} \quad \boxed{S = k_B \cdot \ln \Omega}$$

* Para um sistema em equilíbrio:

$$\langle S \rangle = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = -k_B \sum_i p_i (-\epsilon_i \beta - \ln Z) =$$

$$= -k_B (\langle E \rangle \beta + \ln Z) = \frac{\langle E \rangle}{T} + k_B \ln Z //$$

$$\rightarrow k_B T \ln Z = -\langle E \rangle + T \langle S \rangle = -\langle E \rangle \rightarrow U \quad \therefore F = -U + TS //$$

$$\rightarrow k_B T \ln Z = -F \quad \boxed{F = -k_B T \ln Z}$$

Energia livre de Gibbs

Pela segunda lei de termodinâmica temos:

$$\Delta S_{\text{universo}} > 0 \text{ e que } \Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{meio externo}}$$

$$\Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{meio externo}} > 0$$

Sabemos que $\Delta S = \frac{q}{T}$ $\therefore \Delta S_{\text{meio externo}} = \frac{q_{\text{meio externo}}}{T}$, portanto

$$\Delta S_{\text{reação}} + \frac{q_{\text{meio externo}}}{T} > 0.$$

Sabemos que quando o sistema perde energia, o meio externo recebe, portanto

$$q_{\text{meio}} = -q_{\text{sistema}} = -q_{\text{reação}} \therefore \Delta S_{\text{reação}} + \frac{-q_{\text{reação}}}{T} > 0$$

A entalpia pode ser descrita sendo $\Delta H = q_{\text{produzido na reação}}$, portanto

$$\Delta S + \frac{(-\Delta H)}{T} > 0$$

Se multiplicarmos tudo pela temperatura T , temos que:

$$T \cdot \Delta S - \Delta H > 0$$

Essa equação é importante pois conseguimos entender as variações de um sistema sozinho, e não do universo como um todo

$$T \cdot \Delta S_{\text{reação}} - \Delta H_{\text{reação}} > 0 \rightarrow (x-1) \rightarrow \Delta H_{\text{reação}} - T \cdot \Delta S < 0$$

$$\rightarrow \Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$$

* Para uma equação que possui $\Delta G < 0$ são espontâneas.

Energia livre de Gibbs (pt. 2)

Energia livre de Gibbs e equilíbrio de reações

$$\left(\frac{dG}{d\xi} \right)_{T,P} = 0 \quad ; \quad \text{equilíbrio} \quad * \left[\xi \right] \rightarrow \text{Avanço da reação}$$

* ξ = ξ é o progresso de uma reação química igual ao número de transformações químicas divididas pela constante de equilíbrio.

$$* d\xi = \frac{1}{\nu} dn \quad ; \quad \int_0^{\xi} d\xi = \frac{1}{\nu} \int_{n_0}^n dn = \xi = \frac{n - n_0}{\nu}$$

ν é o número estequiométrico e n é a quantidade de composto!

$$* \text{Potencial químico } (\mu) \rightarrow \text{Como } dU = TdS - P.dV + \sum_{i=1}^N \mu_i dN_i$$

* N é a "localização" possível de molécula (Equação de Boltzmann explica melhor)

$$\rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S,V,N} = \mu \quad ; \quad \text{Como } dG = dU + P.dV + V.dP - T.dS - S.dT \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right) = \mu$$

$$\text{A } T \text{ e } P \text{ são constantes de } G = \sum_{i=1}^N \mu_i dN_i$$

Se aplicarmos algumas transformações em U , também encontramos μ ; relacionado com a entalpia e com a energia livre de Helmholtz.

$$\mu_i = \left(\frac{\partial H}{\partial N_i} \right)_{S,P,N}$$

$$\mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i} \right)$$

Energia livre de Gibbs (p. 3)

Energia livre de Gibbs e equilíbrio (p. 2)

$$\alpha \cdot \gamma_A + \beta \cdot \gamma_B = \sigma \cdot \gamma_C + \phi \gamma_D \rightarrow$$

$$\rightarrow \gamma_A = \gamma_A^\ominus + RT \ln(A) \quad ; \quad \text{Como } dG = VdP - SdT + \sum_{i=1}^K \mu_i dN_i$$

$$\rightarrow \left(\frac{dG}{d\xi} \right)_{T,P} = \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot \nu_i = \Delta G_{T,P}$$

↳ Variação de energia livre de Gibbs para a reação.

$$\rightarrow \Delta G_{T,P} = \sigma \gamma_C + \phi \gamma_D - \alpha \gamma_A - \beta \gamma_B \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta G_{T,P} = (\sigma \gamma_C^\ominus + \phi \gamma_D^\ominus) - (\alpha \gamma_A^\ominus + \beta \gamma_B^\ominus) +$$
$$+ (\sigma RT \cdot \ln(c) + \phi RT \cdot \ln(d)) - (\alpha \cdot RT \ln(A) + \beta \cdot RT \cdot \ln(B))$$

$$\rightarrow \Delta G_{T,P} = \sum_{i=1}^K \mu_i^\ominus \cdot \nu_i + R \cdot T \cdot \ln \frac{(C)^\sigma (D)^\phi}{(A)^\alpha (B)^\beta} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^K \mu_i^\ominus \cdot \nu_i = \Delta G^\ominus$$

↳ Coeficiente da reação (Δ_r)

$$\rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T,P} = \Delta_r G_{T,P} = \Delta G + RT \cdot \ln \Delta_r$$

* No equilíbrio

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right) = 0 \therefore 0 = \Delta G + RT \cdot \ln \Delta_r \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta G = - RT \cdot \ln \Delta_r$$

LIQUIDUS



Fluidos

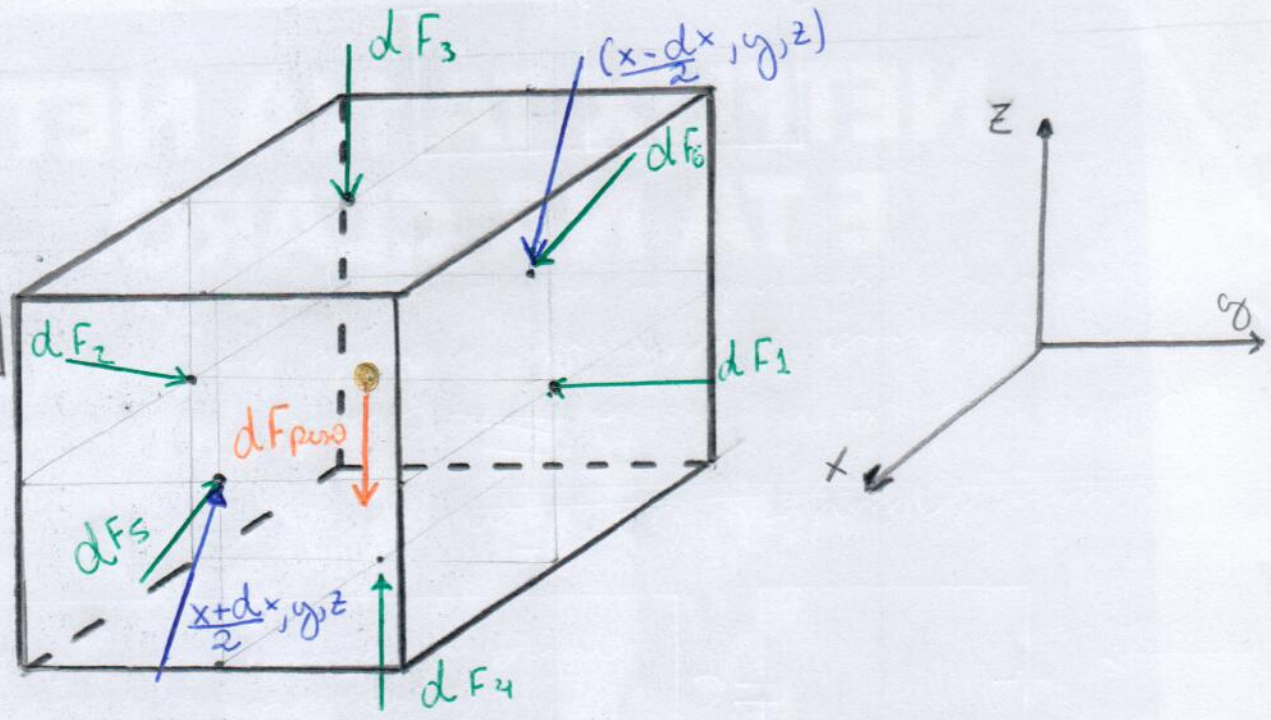
Hidrostática

Premissas:

- * massa: m
- * densidade: ρ

$$dm = \rho \cdot dV$$

$$dm = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)$$



De acordo com a 2ª lei de Newton $\Sigma F = m \cdot a$, portanto:

* direção x: $\Sigma F_x = m \cdot a_x \rightarrow dF_6 - dF_5 = dm \cdot a_x$

$$dF_5 = \rho \left(\frac{x+dx}{2}, y, z \right) dy dz$$

$$dF_6 = \rho \left(\frac{x-dx}{2}, y, z \right) dy dz$$

$$\rightarrow dm = \rho \cdot dV = \rho (dx \cdot dy \cdot dz)$$

$$\rightarrow \rho \left(\frac{x-dx}{2}, y, z \right) dy dz - \rho \left(\frac{x+dx}{2}, y, z \right) dy dz = \rho (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_x$$

* direção y: $\Sigma F_y = m \cdot a_y \rightarrow dF_2 - dF_1 = dm \cdot a_y$

$$dF_1 = \rho \left(x, \frac{y+dy}{2}, z \right) dx dz$$

$$dF_2 = \rho \left(x, \frac{y-dy}{2}, z \right) dx dz$$

$$\rho \left(x, \frac{y-dy}{2}, z \right) dx dz - \rho \left(x, \frac{y+dy}{2}, z \right) dx dz = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_y$$

* direção z: $\Sigma F_z = m \cdot a_z \rightarrow dF_4 - dF_3 - dF_7 = dm \cdot a_z$

$$dF_3 = \rho \left(x, y, \frac{z+dz}{2} \right) dx dy$$

$$dF_4 = \rho \left(x, y, \frac{z-dz}{2} \right) dx dy$$

$$\therefore \rho = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_z$$

Fluidos (pt. 2)

Continuações de pressão

Chegamos a três equações:

$$P\left(\frac{x-dx}{2}, y, z\right) dy dz - P\left(\frac{x+dx}{2}, y, z\right) dy dz = \mu \cdot (dx dy dz) \cdot a_x$$

$$P\left(x, \frac{y-dy}{2}, z\right) dx dz - P\left(x, \frac{y+dy}{2}, z\right) dx dz = \mu \cdot (dx dy dz) \cdot a_y$$

$$P\left(x, y, \frac{z-dz}{2}\right) dx dy - P\left(x, y, \frac{z+dz}{2}\right) dx dy = \mu \cdot (dx dy dz) \cdot a_z$$

* Aplicando a série de Taylor:

$$f(x+dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \cdot dx + \frac{dx^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} \dots$$

$$\approx f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \cdot dx \quad (\text{válido para } dx \rightarrow 0)$$

↳ Para x

$$\approx f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \cdot dy$$

↳ Para y

$$\approx f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \cdot dz$$

↳ Para z

Fluidos (pt. 3)

Pressões (pt. 3)

Como na direção x $\rightarrow P(\frac{x-dx}{2}, y, z) dy dz - P(\frac{x+dx}{2}, y, z) dy dz = \mu \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_x$

$$\rightarrow P(\frac{x-dx}{2}, y, z) \approx P(x, y, z) - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\rightarrow P(\frac{x+dx}{2}, y, z) \approx P(x, y, z) + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\rightarrow \left[P(x, y, z) - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz - \left[P(x, y, z) + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

$$\rightarrow \boxed{-\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \mu \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_x}$$

direção y: $\boxed{-\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \mu \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_y}$

direção z: $\left[P(x, y, z) - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx \cdot dy - \left[P(x, y, z) + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx \cdot dy$
 $-\mu \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_z = \mu \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_z$

$$\rightarrow \boxed{-\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \mu \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot a_z}$$

Fluidos (pt. 4)

Pressão (pt. 4)

Como:

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot a_x} \quad \boxed{-\frac{\partial P}{\partial y} = \rho \cdot a_y} \quad \boxed{-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \cdot g = \rho \cdot a_z}$$

Na segunda lei de Newton: $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\rightarrow \Sigma F_x \cdot \hat{i} + \Sigma F_y \cdot \hat{j} + \Sigma F_z \cdot \hat{k} = m \cdot a_x \hat{i} + m a_y \hat{j} + m a_z \hat{k}$$

$$\rightarrow \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right) \cdot \hat{i} + \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \hat{j} + \left(-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \cdot g\right) \hat{k} = (\rho \cdot a_x) \cdot \hat{i} + (\rho \cdot a_y) \cdot \hat{j} + (\rho \cdot a_z) \cdot \hat{k}$$

$$\rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} - \rho \cdot g \cdot \hat{k} = \rho \cdot a_x \hat{i} + \rho \cdot a_y \hat{j} + \rho \cdot a_z \hat{k}$$

então $\boxed{-\nabla P - \rho \cdot g \cdot \hat{k} = \rho \cdot \vec{a}}$

Considerando $\vec{a} = 0 \rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} - \rho \cdot g \cdot \hat{k} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k}$

$$\rightarrow \cancel{-\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i}} - \cancel{\frac{\partial P}{\partial y} \hat{j}} - \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} = \cancel{0 \hat{i}} + \cancel{0 \hat{j}} + \rho \cdot g \cdot \hat{k}$$

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \hat{k} = \rho \cdot g \cdot \hat{k}} \quad \text{na pressão só varia no vertical}$$

$$\boxed{P = \rho \cdot g \cdot h}$$

↳ altura.

Fluidos (p. 5)

Empuxo

$$\text{Como } P = \rho \cdot g \cdot h \quad \text{e} \quad P = \frac{F}{A}$$

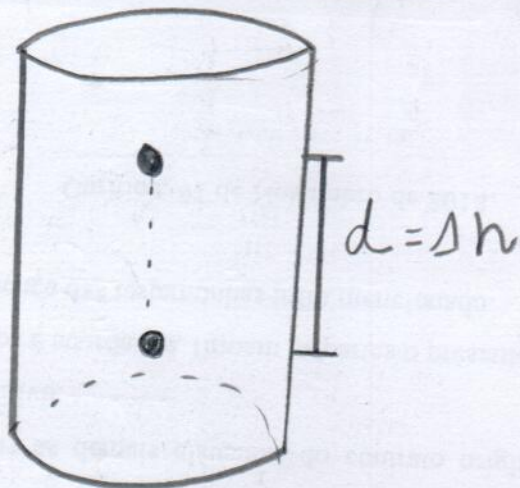
$$\rightarrow \rho \cdot g \cdot h = \frac{F}{A} \quad \therefore \boxed{\rho \cdot g \cdot h \cdot A = F} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\rho \cdot g \cdot V = F_{\text{empuxo}}} \quad \text{Força de empuxo}$$

Como trabalho é $\tau = F \cdot d$; o trabalho do empuxo é:

$$\tau = \rho \cdot g \cdot V \cdot d \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\tau = \rho \cdot g \cdot V \cdot \Delta h}$$

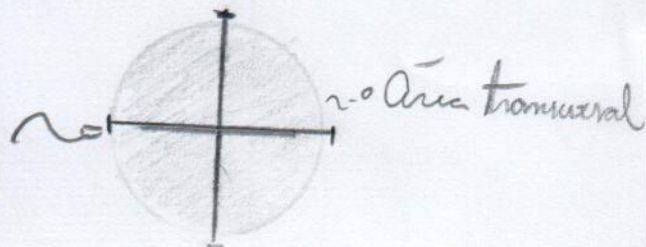
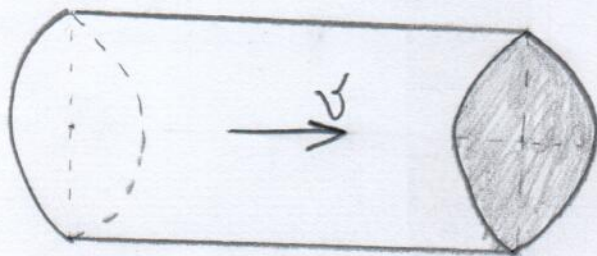


Por isso que quando afundamos algo e saltamos, o elemento que estáamos segurando solta, adquirindo energia cinética.

Fluidos (pt. 6)

Hidrodinâmica (fluidos ideais)

Equação da continuidade

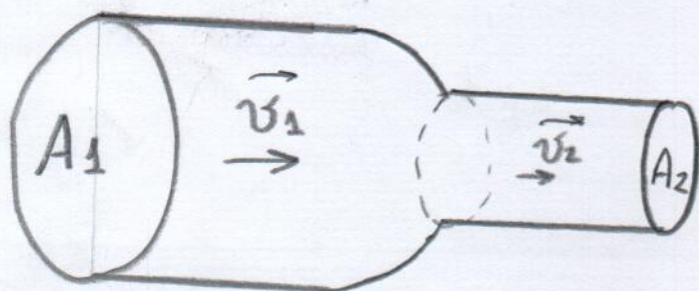


Como não ocorre variação no volume:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot v$$

Volume (V) = $A \cdot \Delta S$; densidade (ρ) = $\frac{\Delta m}{V} \rightarrow \Delta m = \rho \cdot V$

As taxas de massa \dot{m} : $\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \frac{\rho \cdot V}{dt} = \rho \cdot A \cdot \frac{dS}{dt} \therefore \dot{m} = \rho \cdot A \cdot v$

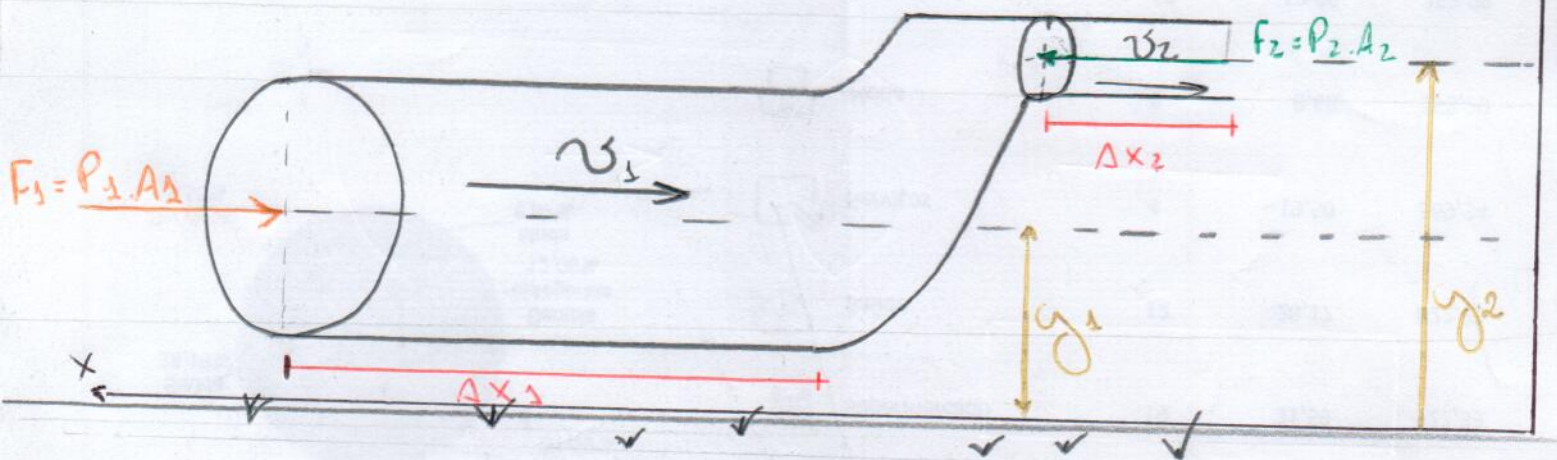


As taxas de massa $\dot{m} \equiv C + e \therefore \rho \cdot A \cdot v \equiv C + e$

$\rightarrow \rho \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \equiv C + e \therefore A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

Fluidos (PE. 4)

Equações de Bernoulli



Como Energia cinética é $\frac{m \cdot v^2}{2}$ e Energia potencial gravitacional $m \cdot g \cdot h$,

* A variação de E cinética é dada por: $\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2}$

Podemos dizer então que:

$$\frac{\Delta m}{\rho} (P_1 - P_2) - \Delta m \cdot g (y_2 - y_1) = \frac{\Delta m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

$$\rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} - g(y_2 - y_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} - g \cdot y_2 + g \cdot y_1 = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \quad (1)$$

Colocando de cada lado o "número" temos que:

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{v_1^2}{2} \cdot \rho = P_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{v_2^2}{2} \cdot \rho$$

Fluidos (pt. 8)

Fluidos não-ideais

Possuem viscosidade, portanto resistências ao movimento, existindo tensões de cisalhamento afetando a movimentação do fluido.

Propriedades de um fluido real:

- Viscosidade: * Depende das interações intermoleculares, desta forma
 - o aumento da temperatura diminui a força de interações molecular e aumenta a energia de translação e rotação, diminuindo a viscosidade
 - * Líquidos que possuem alta polaridade também tendem a ser mais viscosos

Comparações:



- Tensão superficial: É exercida a partir das forças forças de coesão que atraem os moléculas da superfície para o interior do líquido. Ocorre quando a força de coesão é maior que a força de adesão com as moléculas internas.

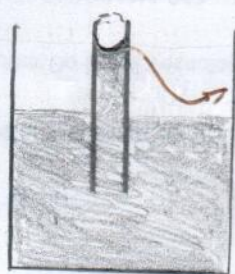
* O aumento de temperatura diminui a tensão superficial.

Comparações:

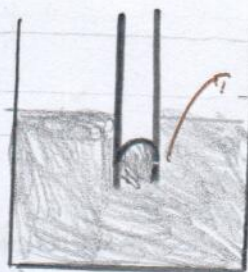
Interação dipolo-induzido < dipolo-permanente < Ponte de hidrogênio

Capilaridade

É a capacidade de um fluido aderir a parede de um tubo fino, normalmente de vidro, depende das forças de adesão e coesão



Menisco côncavo
Adesão > Coesão



Menisco convexo
Coesão > Adesão

Fluidos (pt. 9)

Equações de Cauchy

Forças superficiais:

- Pressão
- Força de viscosidade

Forças corpusculares:

- Força gravitacional
- Forças eletromagnéticas
- Força centrífuga
- Força de Coriolis

Segundo a 2ª lei de Newton $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$;

Como $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \boxed{\sum \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$

Podemos separar as forças atuantes em corpusculares e superficiais

$$\boxed{m \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{corp}} + \sum \vec{F}_{\text{superficial}}}$$

Como $m = \rho \cdot V \rightarrow dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$\boxed{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{corp}} + \sum \vec{F}'_{\text{sup}}}$$

Fluidos (pt. 10)

Continuação da equação de Cauchy

Para o eixo x temos que: $\vec{v} = (u, v, w)$

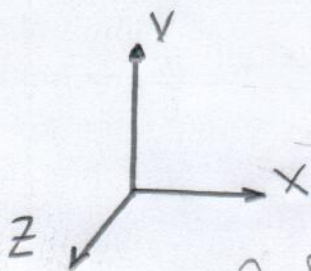
$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dt} = \sum_{\text{corpo}} F_x + \sum_{\text{super}} F_x$$

* Considerando a tensão exercida pelas forças de pressão e viscosidade

• Tensão = $\sigma_{ij} \Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

• Tensão exercida pela viscosidade = $\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$

• É a deformação = $\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$



Considerando $\vec{T}_x = (\sigma_{xx}; \sigma_{xy}; \sigma_{xz})$, $\vec{T}_y = (\sigma_{yx}; \sigma_{yy}; \sigma_{yz})$ e $\vec{T}_z = (\sigma_{zx}; \sigma_{zy}; \sigma_{zz})$

A força \vec{F} associada a qualquer ponto em um plano de vetor unitário normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ temos:

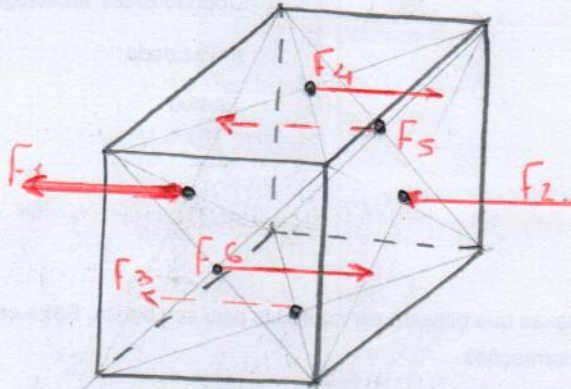
$$\vec{F} = n_1 \vec{T}_x + n_2 \vec{T}_y + n_3 \vec{T}_z = (n_1; n_2; n_3) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Fluidos (pt. 11)

Equações de Cauchy (pt. 3)

No eixo x temos que os componentes atuam na superfície:

$$\sum \vec{F}_{x \text{ super}}$$



Aplicando a fórmula de Taylor.

$$\cdot F_1 = -\left(\sigma_{xx} - \frac{dx}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right) \cdot dy \cdot dz$$

$$\cdot F_2 = \left(\sigma_{xx} - \frac{dx}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right) \cdot dy \cdot dz$$

$$\cdot F_3 = -\left(\sigma_{yx} - \frac{dy}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\right) \cdot dx \cdot dz$$

$$\cdot F_4 = \left(\sigma_{yx} - \frac{dy}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\right) \cdot dx \cdot dz$$

$$\cdot F_5 = -\left(\sigma_{zx} - \frac{dz}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right) \cdot dx \cdot dy$$

$$\cdot F_6 = \left(\sigma_{zx} - \frac{dz}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right) \cdot dx \cdot dy$$

...

$$\sum F_{x \text{ superfice}} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right) dx dy dz$$

Fluidos (pt. 12)

Equação de Cauchy (pt. 4)

$$\text{Como } \sum_x \vec{F}_{xup} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz ;$$

e considerando que a única força corpuscular é o peso: cond:

$$\sum_x \vec{F}_{corp} = m \cdot g_x = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot g_x$$

$$\text{Como: } \rho \cdot dx dy dz \cdot \frac{dU}{dt} = \sum F_{xcorp} + F_{xrup} \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \cdot dx dy dz \cdot \frac{dU}{dt} = \rho \cdot dx dy dz \cdot g_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\rightarrow \boxed{\rho \cdot \frac{dU}{dt} = \rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}}$$

↳ Para o eixo x

de forma análoga encontramos para y e z respectivamente:

$$\boxed{\rho \cdot \frac{dV}{dt} = \rho \cdot g_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}}$$

↳ Para o eixo y

$$\boxed{\rho \cdot \frac{dW}{dt} = \rho \cdot g_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}}$$

↳ Para o eixo z

Fluidos (pt. 13)

Equações de Navier-Stokes

Nós podemos separar do componente x as forças de superfície, pressão e viscosidade.

$$\bullet \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$$

$$\bullet \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

$$\bullet \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

* Podemos fazer isso de forma análoga para y e z .

Como a equação de Cauchy i :

$$\rho \cdot \frac{dU}{dt} = \rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \text{ ; para o eixo } x, \text{ temos:}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

↳ Para x

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

↳ Para y

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

↳ Para z

Fluidos (pt. 14)

Continuação da equação de Navier-Stokes

Segundo a lei de Newton de viscosidade:

$$\tau = \gamma \cdot \frac{dx}{dy} \quad \begin{array}{l} \bullet \gamma \rightarrow \text{viscosidade dinâmica} \\ \bullet \frac{dx}{dy} \rightarrow \text{taxa de deformação} \end{array}$$

$$\lambda = \frac{-2}{3} \gamma \rightarrow \text{"segunda" viscosidade}$$

Substituindo temos que:

$$\tau_{xx} = 2\gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \cdot \text{div } \vec{v}$$

$$\tau_{xy} = \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yx} = \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2 \cdot \gamma \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \cdot \text{div } \vec{v}$$

$$\tau_{zy} = \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zy} = \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zz} = 2 \cdot \gamma \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \cdot \text{div } \vec{v}$$

Fluidos (pt. 15)

Equações de Navier-Stokes (pt. 3)

Substituindo os valores de T_{ij} encontraremos a equação de fluxo compressível.

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w \right) = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \cdot \text{div} \vec{v} \right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

↳ Para x

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot w \right) = \rho \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[2\gamma \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \cdot \text{div} \vec{v} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

↳ Para y

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w \right) = \rho \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\gamma \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \cdot \text{div} \vec{v} \right]$$

Fluidos (pt. 16)

Equações de Navier-Stokes (pt. 4)

Para um fluido incompressível $\text{div } \vec{v} = 0$

$$\tau_{ij} = 2 \cdot \gamma \cdot \epsilon_{ij}$$

Em que ϵ_{ij} é a taxa de deformação para o vetor velocidade
 $\vec{v} = (u, v, w)$

$$\rightarrow \tau_{ij} = 2 \gamma \cdot \epsilon_{ij} = 2 \gamma \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Considerando a densidade (ρ) constante e a viscosidade γ constante:

$$\text{Para } x \rightarrow \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g_x + \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

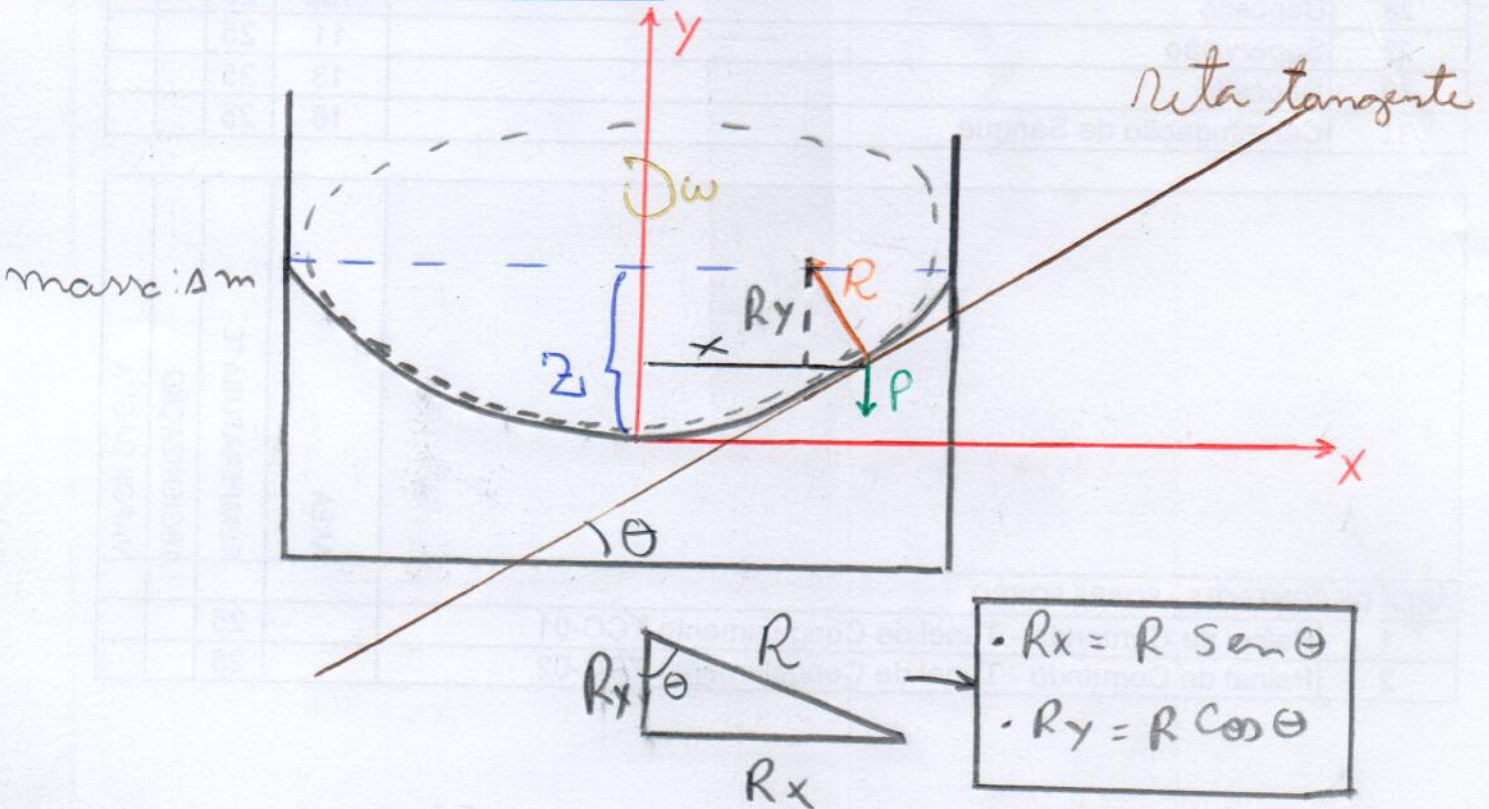
$$\text{Para } y \rightarrow \left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot g_y + \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Para } z \rightarrow \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g_z + \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$\rightarrow \text{na forma vetorial: } \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \cdot \vec{g} + \gamma \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

Fluidos (pt. 17)

Fluido em rotação



* Equilíbrio vertical $\rightarrow R_y = P = \Delta m \cdot g$

* Força resultante no eixo x

$R_x = F_r = F_{centrifuga} = \Delta m \cdot \omega^2 \cdot x$; como $R_x = R \cdot \sin \theta$

$\rightarrow R \sin \theta = \Delta m \cdot \omega^2 \cdot x \rightarrow \frac{R \sin \theta}{R \cos \theta} = \frac{\Delta m \cdot \omega^2 \cdot x}{\Delta m \cdot g} \rightarrow$

$\rightarrow \tan \theta = \frac{\omega^2 \cdot x}{g} \rightarrow \tan \theta = \text{derivada} \therefore \tan \theta = z' \rightarrow$

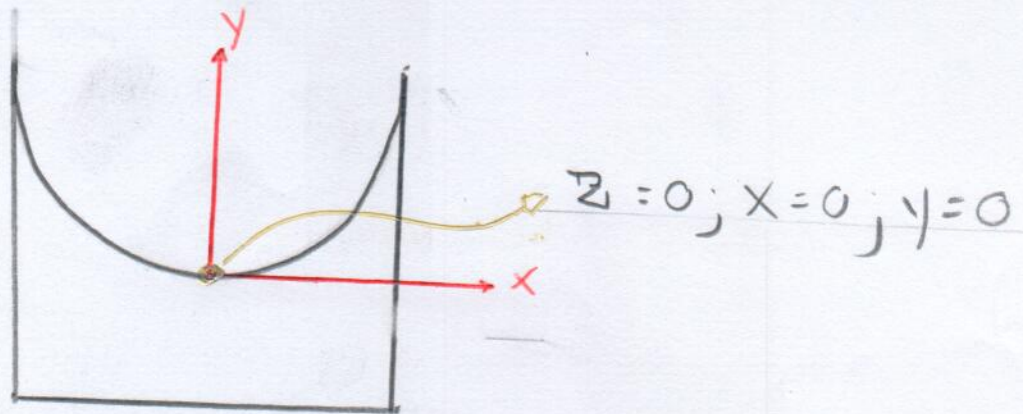
$\rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\omega^2 \cdot x}{g} \rightarrow \int dz(x) = \int \frac{\omega^2 \cdot x}{g} = \frac{\omega^2}{g} \int x \rightarrow$

$\rightarrow z(x) + k = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} \therefore z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} - k$

Fluidos (pt. 38)

Continuação da rotação de fluidos

Como $Z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} - k$, no ponto mínimo temos:



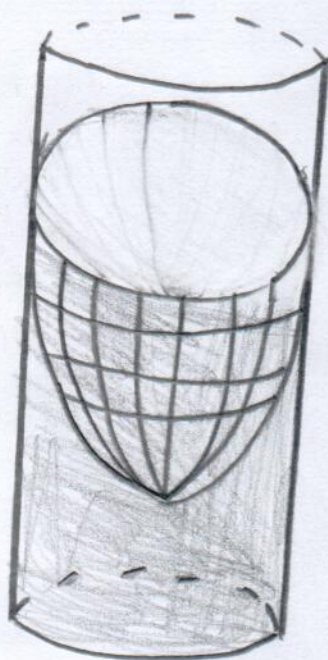
Como Z e x são 0 $\rightarrow 0 = \frac{\omega^2 \cdot 0^2}{2g} - k$

portanto $k=0$

Então temos que

$$Z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2 \cdot g}$$

\hookrightarrow É um parabolóide



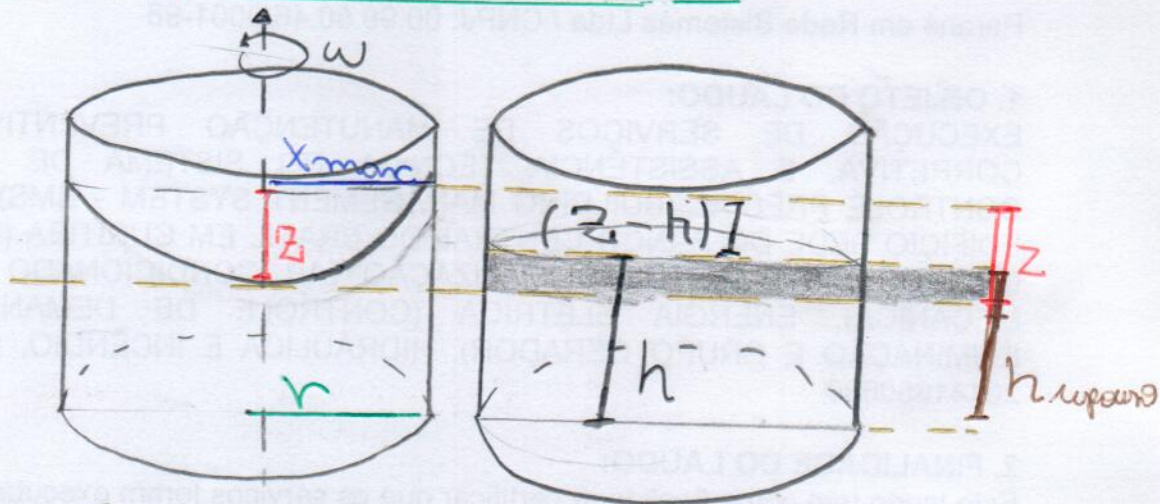
Fluidos (pt. 19)

Fluido sendo rotacionado (pt. 3)

Tensões exercidas na parede de recipiente cilíndrico

$$(z-h) + h = H_{total}$$

$$H_{total} = z$$



$$\text{Como } z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2g} \rightarrow x = \sqrt{\frac{z \cdot 2g}{\omega^2}} \quad \boxed{x_{max} = r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{z \cdot 2g}{\omega^2}} \quad ; \text{ Como } \sigma = \frac{F}{A} \text{ é um cilindro } \rightarrow$$

$$\rightarrow A = 2\pi \cdot h \cdot r \rightarrow 2\pi \cdot \sqrt{\frac{z \cdot 2g}{\omega^2}} \cdot z \quad \begin{matrix} \text{área lateral} & \text{raio} & \text{altura} \end{matrix}$$

$$\boxed{A = \frac{2\pi \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot 2g}}{\omega}}$$

$$\therefore \sigma = F$$

Fluidos (pt. 20)

Tensão na parede do cilindro.

Como o raio = $\sqrt{\frac{Z \cdot 2g}{\omega^2}}$ e a força atuante é a centrífuga;

$$F_{\text{centrifuga}} = m \cdot \omega^2 \cdot r \rightarrow F_x = m \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot 2g}{\omega^2}}$$

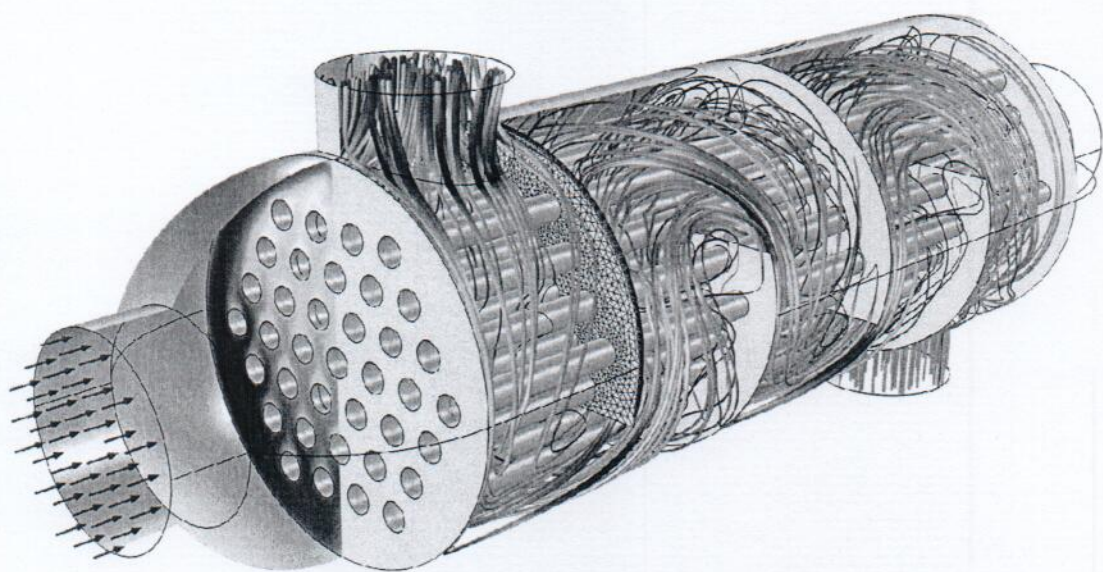
$$\rightarrow F = m \cdot \sqrt{Z} \cdot \sqrt{2g}$$

Como $\sigma = \frac{F}{A} + \zeta_{ij}$; ζ_{ij} = tensão causada pela viscosidade

$$\rightarrow A = \frac{2\pi Z \cdot \sqrt{Z} \cdot \sqrt{2g}}{\omega} \rightarrow \sigma = \frac{\omega \cdot m \cdot \sqrt{Z} \cdot \sqrt{2g}}{2\pi Z \cdot \sqrt{Z} \cdot \sqrt{2g}} + \zeta_{ij}$$

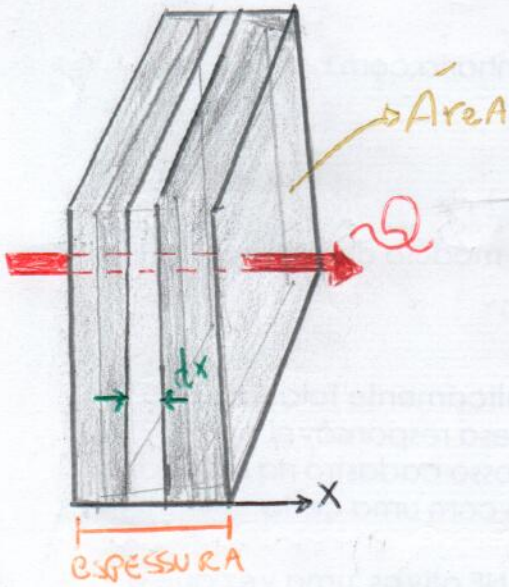
$$\sigma = \frac{\omega \cdot m}{2\pi Z} + \zeta_{ij}$$

CALOR PROPAGATIONEM



Propagação de Calor

Condução térmica



$$T = (x, y, z) \cdot -$$

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} - k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{q} = -k \cdot \nabla T \rightarrow$$

→ Como a taxa de transferência de calor é:

$$\frac{dQ}{dt}$$

$$\text{Temos } \frac{dQ}{dt} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dQ}{dt} = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \int_{x=0}^{\text{ESPESURA}} \dot{q} dx = - \int_{T_2}^{T_1} k \cdot A \cdot dT \rightarrow$$

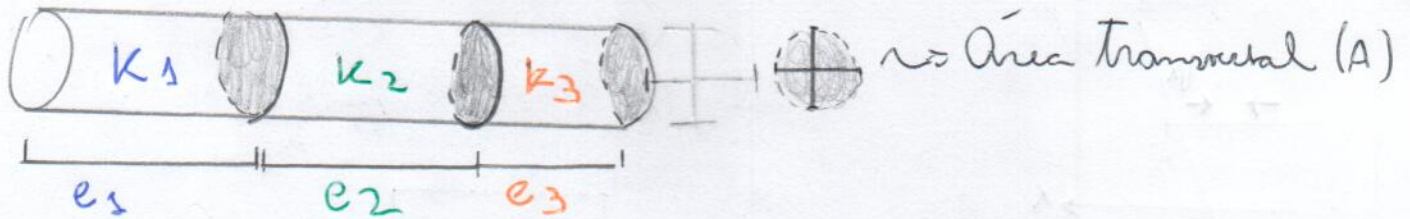
$$\rightarrow \dot{Q} = \frac{-k \cdot A (T_2 - T_1)}{e} \rightarrow \boxed{\dot{Q} = \frac{k \cdot A (T_1 - T_2)}{e}}$$

Preparação de Calor (pt. 2)

* Resistência térmica

$$\Phi = \frac{k \cdot A \cdot (T_1 - T_2)}{e} \rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{e \cdot \Phi}{k \cdot A} \text{ no "Resistência Térmica"}$$

Condutores em série:



$$R_{T1} = \frac{e_1}{k_1 \cdot A}$$

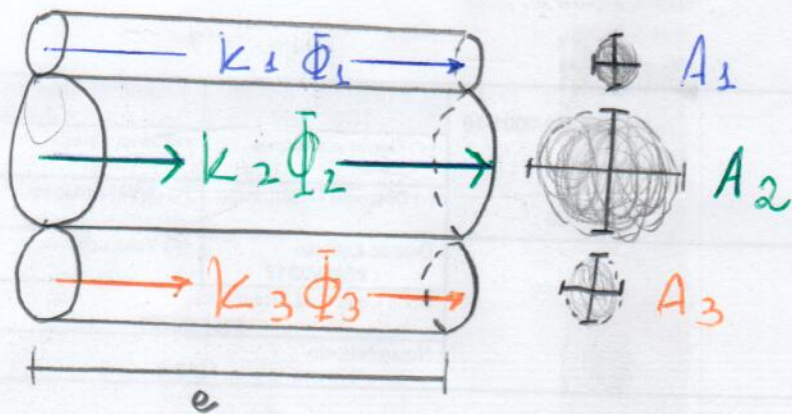
$$R_{T2} = \frac{e_2}{k_2 \cdot A}$$

$$R_{T3} = \frac{e_3}{k_3 \cdot A}$$

$$R_{\text{resultante}} = \frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A}$$

$$\left[\frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A} + \frac{e_3}{k_3 A} \right] \cdot \Phi = \Delta T \rightarrow \Phi = \frac{(T_1 - T_2) \cdot k_1 A + k_2 A + k_3 A}{e_1 k_2 k_3 + e_2 k_1 k_3 + e_3 k_1 k_2}$$

Propagação de calor (pt. 3)



Condutores em paralelo

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$R_1 = \frac{e}{k_1 A_1}$$

$$R_2 = \frac{e}{k_2 A_2}$$

$$R_3 = \frac{e}{k_3 A_3}$$

$$R_{\text{total}}^{-1} = \frac{1}{\frac{e}{k_1 A_1}} + \frac{1}{\frac{e}{k_2 A_2}} + \frac{1}{\frac{e}{k_3 A_3}}$$

$$\rightarrow R_{\text{total}} = \frac{e}{k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3}$$

$$\Phi = \left(\frac{e}{k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3} \right)^{-1} \cdot \Delta T$$

Propagação de Calor (pt. 4)

Irradiação

Lei de Stefan-Boltzmann

Equação de Planck para irradiação:

$$\frac{dP}{d\lambda} \cdot \frac{1}{A} = \frac{2\pi h^2 c^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{P}{A}\right)}{d\lambda} = \int_0^{\infty} \left[\frac{2\pi h^2 c^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \right] \cdot d\lambda \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{P}{A} = 2\pi h^2 c^2 \int_0^{\infty} \left[\frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \right] \rightarrow x = \frac{hc}{\lambda kT} \rightarrow$$

$$\rightarrow dx = -\frac{hc}{\lambda^2 kT} d\lambda \rightarrow \lambda = \frac{x kT}{c} \rightarrow c = \frac{x kT}{\lambda}$$

$$\rightarrow \frac{P}{A} = 2\pi \left(\frac{x kT}{c} \right) \left(\frac{x kT}{\lambda} \right)^2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\left(-\frac{\lambda^2 kT}{hc} \right) dx}{e^x - 1} \right] \rightarrow$$

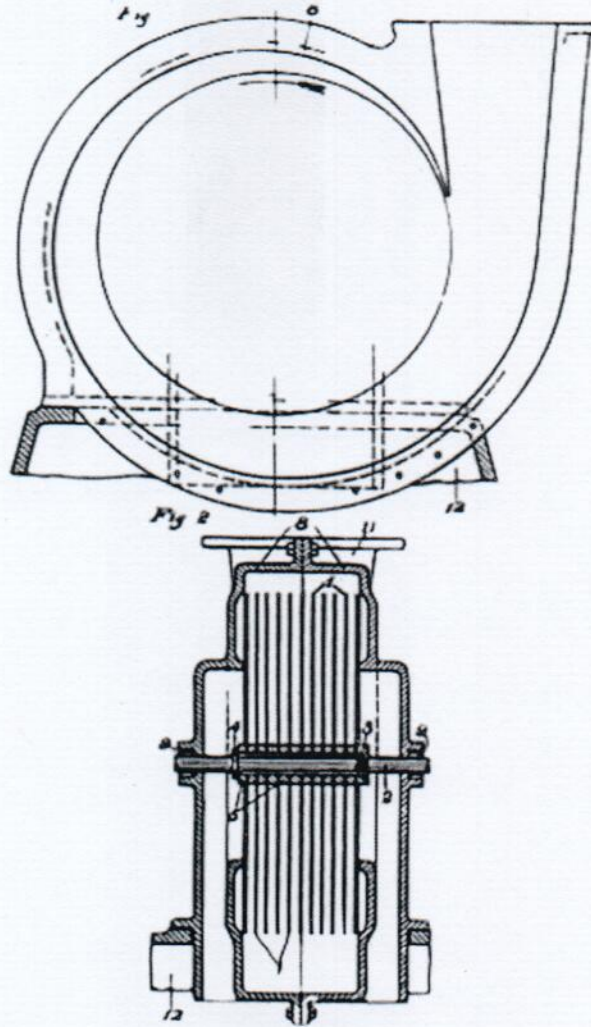
$$\rightarrow 2\pi \left(\frac{x^3 \lambda^5 k^4 T^4}{h^3 c^2 \lambda^5} \right) \int_0^{\infty} \left[\frac{dx}{e^x - 1} \right] = \frac{2\pi (kT)^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{x^3}{e^x - 1} \right] dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \left[\frac{x^3}{e^x - 1} \right] dx = \frac{\pi^4}{15} \rightarrow \frac{P}{A} = \frac{2\pi (kT)^4}{h^3 c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{P}{A} = \left(\frac{2k^4 \pi^5}{15 h^3 c^2} \right) T^4 \rightarrow \frac{P}{A} = I \quad \cdot \quad \boxed{I = \sigma T^4}$$

* Para emissor ideal

ELECTROSTATICA



Eletrostática (pt. 3)

Lei de Coulomb

Energia da massa de Planck

$$E = m_p \cdot c^2 \rightarrow f = \frac{m_p \cdot c^2}{d_p}$$

$$F_{eletrica} = \frac{m_p c^2}{d_p} \left(\frac{\alpha_{2B}}{\alpha_{1A}} \right) \cdot (\alpha_{2B1})$$

α_1 : geometria de onda.

α_2 : spin da partícula

$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{q^2_p}{4\pi d_p^2} \rightarrow \alpha_2 = \frac{r_e^2}{4\pi (\pi r_e)^2 + (\pi(r_e)(\pi r_e) + \pi r_e^2)} = \frac{1}{(4\pi^3 + \pi^2 + \pi)}$$

$$\rightarrow F_e = \frac{m_p c^2}{d_p} \cdot \frac{q^2_p}{4\pi r^2} \cdot \frac{q^2_p}{4\pi d_p^2} \cdot \alpha_e \rightarrow F_e = \frac{m_p c^2}{4\pi d_p} \cdot \frac{\alpha_e q^2_p}{r^2} \cdot \frac{4\pi d_p^2}{q^2_p}$$

* Como $e^2_e = \alpha_e \cdot q^2_p \rightarrow q = \Delta e e \rightarrow$

$$\rightarrow F_e = \frac{m_p \cdot c^2}{4\pi d_p} \cdot \left(\frac{4\pi d_p^2}{q^2_p} \right) \cdot \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F_e = \frac{d_p \cdot m_p \cdot c^2}{q^2_p} \cdot \left(\frac{q_1 q_2}{r^2} \right) \rightarrow K_e = \frac{d_p \cdot m_p \cdot c^2}{q^2_p}$$

$$F_{e_{12}} = K_e \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{d_{12}^2} \right)$$

Electrostatica (pt. 2)

Lei de Gauss

$$F_{12} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_{12}^2} \longrightarrow d_{12} = d_2 - d_1 \longrightarrow$$

$$F_{12} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{(d_2 - d_1)^2} \cdot (d_2 - d_1) \longrightarrow \boxed{F_{12} = -F_{21}}$$

$$E_1 = \frac{F_{21}}{q_1} = \frac{k \cdot q_2}{d_{21}^2} \hat{d}_{21} \longrightarrow \boxed{E = \frac{k \cdot Q}{d^2} \hat{d}} \longrightarrow$$

$$F_{\text{TOTAL}} = F_1 + F_2 + \dots \quad \therefore E_{\text{TOTAL}} = E_1 + E_2 + \dots = k \sum_{j=1}^N \frac{Q_j (d - d_j)}{|d - d_j|^3}$$

$$E = k \iiint_V \rho(d') \cdot \frac{(d - d')}{|d - d'|^3} d^3 d' \longrightarrow$$

$$\nabla \cdot E = k \cdot \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\rho(d') (d - d')}{|d - d'|^3} \right) d^3 d' \longrightarrow$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{(d - d')}{|d - d'|^3} \right) d^3 (d - d') = \iint_S \left(\frac{(d - d')}{|d - d'|^3} \right) \cdot \hat{n} dS$$

$$\frac{r - r'}{|r - r'|} = \hat{n} \longrightarrow dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \longrightarrow$$

$$\iint_S \left(\frac{\hat{n} \cdot \hat{n}}{|d - d'|^2} \right) \cdot dS = \iint_S \frac{1}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{(d - d')}{|d - d'|^3} \right) d^3 (d - d') = 4\pi \implies \nabla \cdot \left(\frac{(d - d')}{|d - d'|^3} \right) = 4\pi \delta(d - d')$$

Eletrostática (pt. 3)

Lei de Gauss (continuação)

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}'}{|\mathbf{d} - \mathbf{d}'|^3} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}') \rightarrow \iiint \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}_0) f(\mathbf{d}) d\mathbf{d} = f(\mathbf{d}_0)$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = k \iiint_V \rho(\mathbf{d}') \cdot \nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{d} - \mathbf{d}')}{|\mathbf{d} - \mathbf{d}'|^3} \right) d^3 d' \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\pi k \iiint_V \rho(\mathbf{d}') \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}') d^3 d' = 4\pi k \rho(\mathbf{d})$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$\rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E(\mathbf{d}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{d}} \rightarrow$$

$$\rightarrow dS = \hat{\mathbf{d}} R^2 \cdot \sin\theta d\theta d\phi \rightarrow$$

$$\rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}} \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\phi \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (4\pi) = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

$$\rightarrow \Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q - q) = 0$$

$$\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \oint d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot S}}$$

Trabalho da força elétrica entre 2 cargas pontiformes

$$\text{Como } F = \frac{|q_1| \cdot |Q_2| \cdot k}{d^2} \text{ e } \mathcal{C} = \int F \cdot dd \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{C} = \int_{d_1}^{d_2} \frac{k \cdot q_1 \cdot Q_2}{d^2} \cdot dx = k \cdot q_1 \cdot Q_2 \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{d^2} \cdot dd \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} \cdot dx = \frac{x^{-1}}{-1} // \rightarrow \mathcal{C} = k \cdot \frac{q_1 Q_2}{d} \Big|_{d_1}^{d_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{C} = \frac{k \cdot q_1 Q_2}{d_1} - \frac{k \cdot q_1 \cdot Q_2}{d_2} \therefore \boxed{\mathcal{C} = k q_1 Q_2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)}$$

$$\text{Como } \mathcal{C} = \Delta E_{\text{energia}} \rightarrow k \cdot q_1 \cdot Q_2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = E_{\text{pot}_1} - E_{\text{pot}_2}$$

$$\rightarrow \mathcal{C} = \frac{k \cdot q_1 Q_2}{d_1} - \frac{k \cdot q_1 Q_2}{d_2} = \boxed{q_1 \cdot \left(\frac{k \cdot Q_2}{d_1} - \frac{k \cdot Q_2}{d_2} \right)}$$

Potencial elétrico (V)

$$\mathcal{C} = q \cdot \left(\underbrace{\frac{k \cdot Q_2}{d_1}}_{V_1} - \underbrace{\frac{k \cdot Q_2}{d_2}}_{V_2} \right) \rightarrow \boxed{V = \frac{k \cdot Q_2}{d_1} - k}$$

Eletrostática (pt. 5)

Relação potencial e campo elétrico

$$\text{Como } \mathcal{C} = q(V_1 - V_2) = q((v + dV) - v) = q dV //$$

$$\text{sendo } \vec{E} = E\hat{i} \text{ e } d\hat{i} = d\vec{d} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F} = -q \cdot E \cdot \hat{i} \rightarrow \mathcal{C} = \vec{F} \cdot d\vec{d} = -qE\hat{i} \cdot d\hat{i} = -qE dd$$

$$\text{Com } \mathcal{C} = -qE dd \rightarrow E = -\frac{dV}{dd} \text{ (para 1 direção)}$$

Então para todas as direções (x, y, z)

$$E = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \hat{k}\right)$$

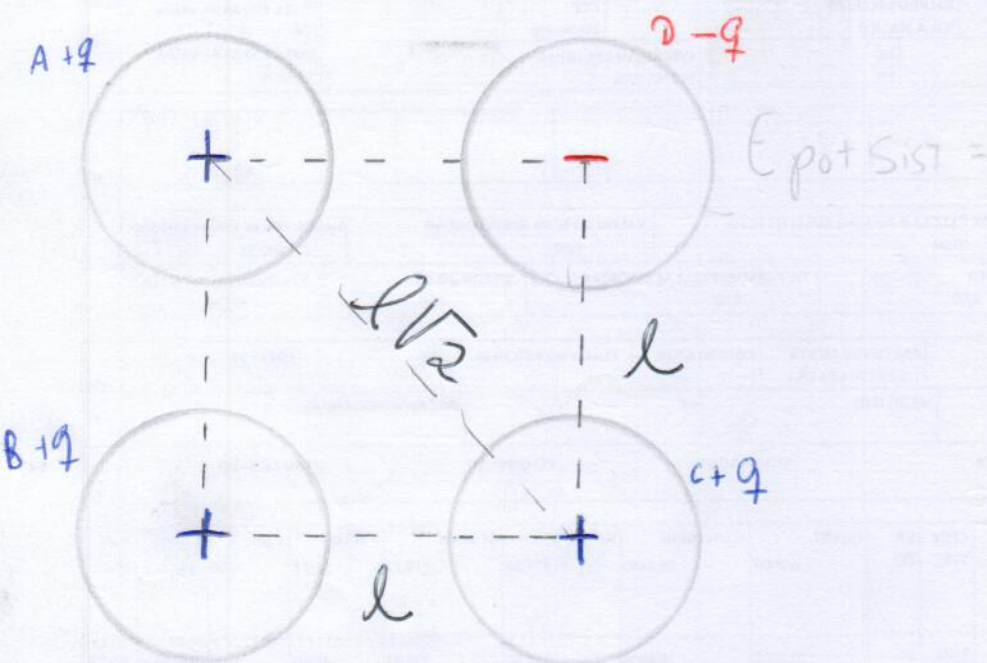
$$\boxed{E = -\nabla V}$$

Electrostatica (pt. 6)

Energia potencial em um sistema formado por várias cargas

$$E_{\text{potSIST}} = E_{\text{pot}_{12}} + E_{\text{pot}_{13}} + E_{\text{pot}_{1N}} + \dots + E_{\text{pot}_{jN}}$$

Exemplo em um sistema de 4 cargas



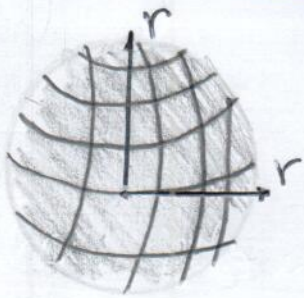
$$E_{\text{potSIST}} = -\frac{A \cdot D \cdot k \cdot q^2}{l} + \frac{A \cdot B \cdot k \cdot q^2}{l} + \frac{A \cdot C \cdot k \cdot q^2}{l\sqrt{2}} + \frac{B \cdot D \cdot q^2}{l\sqrt{2}} + \frac{B \cdot C \cdot q^2}{l} - \frac{C \cdot q^2}{l}$$

Número de parcelas de energia em um sistema de N cargas:

$$C_2^N = \frac{N!}{(N-2)!2!}$$

Electrostatica (p. 7)

Campo elétrico gerado por um condutor esférico



Campo elétrico interno

$$E_{int} = 0 //$$

Campo superficial

$$E_{sup} = \frac{k \cdot |q|}{r^2} \cdot \frac{1}{2}$$

Campo externo

$$E_{ext} = \frac{k \cdot |q|}{d^2}$$

Demonstração

$$E = -\nabla V \rightarrow E \hat{U} = -\frac{dV}{dr} \cdot \hat{U} \quad \boxed{E = -\frac{dV}{dr}}$$

$$E = \frac{E_{ext}}{\epsilon} \cdot r - \frac{E \cdot (r - \epsilon)}{\epsilon} = -\frac{dV}{dr} \rightarrow$$

$$\rightarrow dV = -\frac{1}{\epsilon} \cdot (E_{ext} \cdot r - E \cdot (r - \epsilon)) \cdot dr \rightarrow \int_{V_{int}}^{V_{sup}} dV =$$

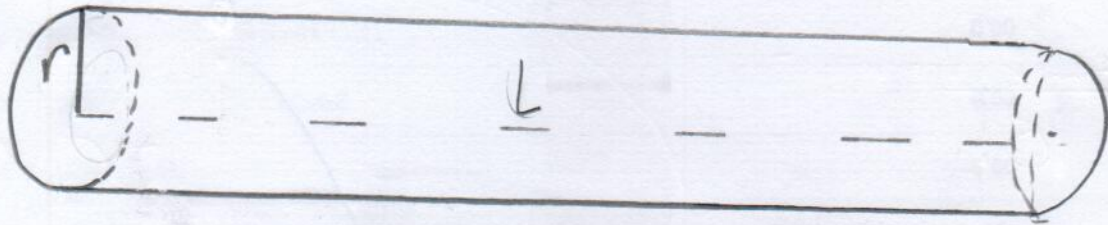
$$\rightarrow \int_{V_{int}}^{V_{sup}} dV = - \left[\int_{R-\epsilon}^R \frac{E_{ext}}{\epsilon} \cdot r - \int_{R-\epsilon}^R \frac{E}{\epsilon} (r - \epsilon) \right] \rightarrow \Delta V = -\frac{E_{ext}}{2\epsilon} \cdot (r^2 - (r - \epsilon)^2) +$$

$$+\frac{E}{\epsilon} \cdot (r - (r - \epsilon)) = +\frac{E_{ext}}{2\epsilon} \cdot \epsilon^2 + \frac{E(r - \epsilon) \cdot \epsilon}{\epsilon} + \frac{E_{int} \cdot r \cdot \epsilon}{\epsilon} \rightarrow$$

$$\boxed{V_{sup} - V_{int} = -\frac{\epsilon \cdot E_{sup}}{2} = -\frac{\epsilon \cdot k \cdot |q|}{2r^2}}$$

Electrostatics (pt. 8)

campo elétrico gerado por um fio longo uniformemente carregado:



$$\text{Densidade linear de carga} = \frac{Q_{\text{TOTAL}}}{L}$$

Aplicando a lei de Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E \oint dS = \frac{Q_{\text{TOTAL}} \cdot L}{\epsilon_0 \cdot L} \rightarrow$$

→ Como a área superficial é $2\pi r \cdot L$ →

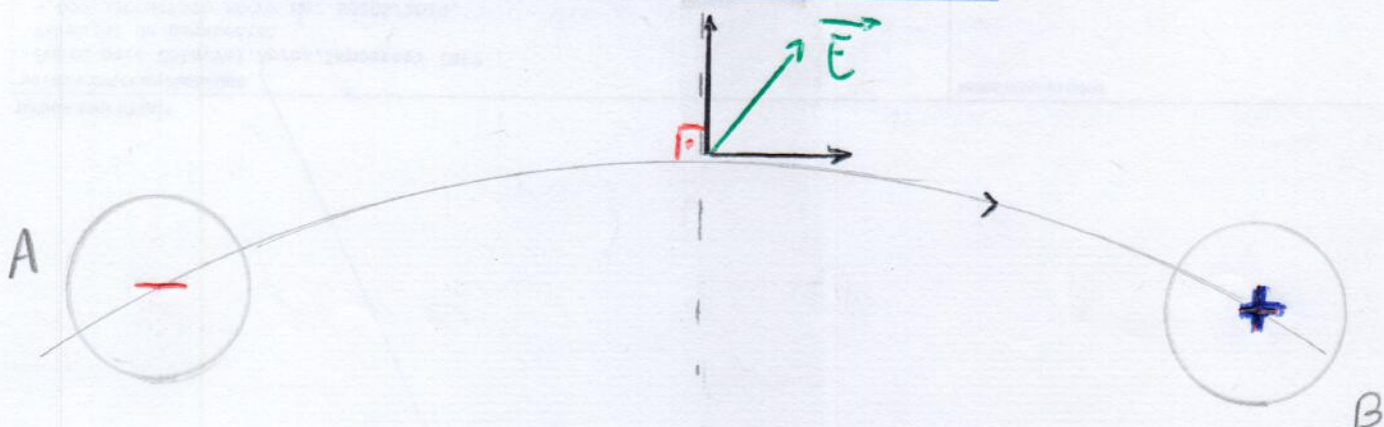
$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q_{\text{TOTAL}} \cdot L}{\epsilon_0 \cdot L} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = \frac{Q_{\text{TOTAL}}}{2\pi \epsilon_0 \cdot L}, \text{ como } k = 4\pi \epsilon_0$$

$$\rightarrow \boxed{E = \frac{2Q_{\text{TOTAL}}}{2k \cdot L}}$$

Electrostatics (pt. 9)

Perpendicularity of the electric field



$$V_{AB} = q(V_A - V_B) = 0 \rightarrow dV = \vec{F} \cdot d\vec{S} = q$$

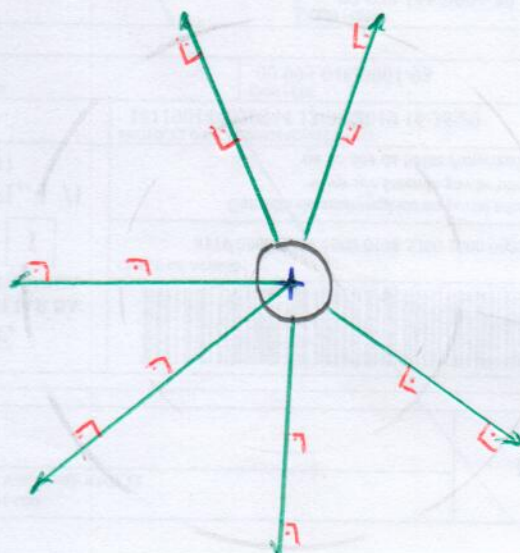
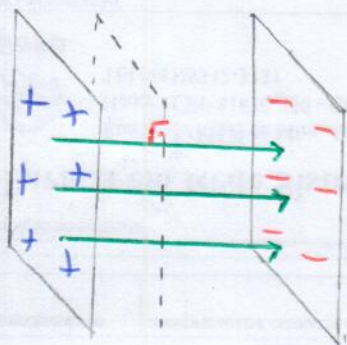
$$dV = \vec{F} \cdot d\vec{S} = q\vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow V = \int qE \cdot dS = 0$$

$$q \neq 0; dS \neq 0 \therefore \vec{E} = 0$$

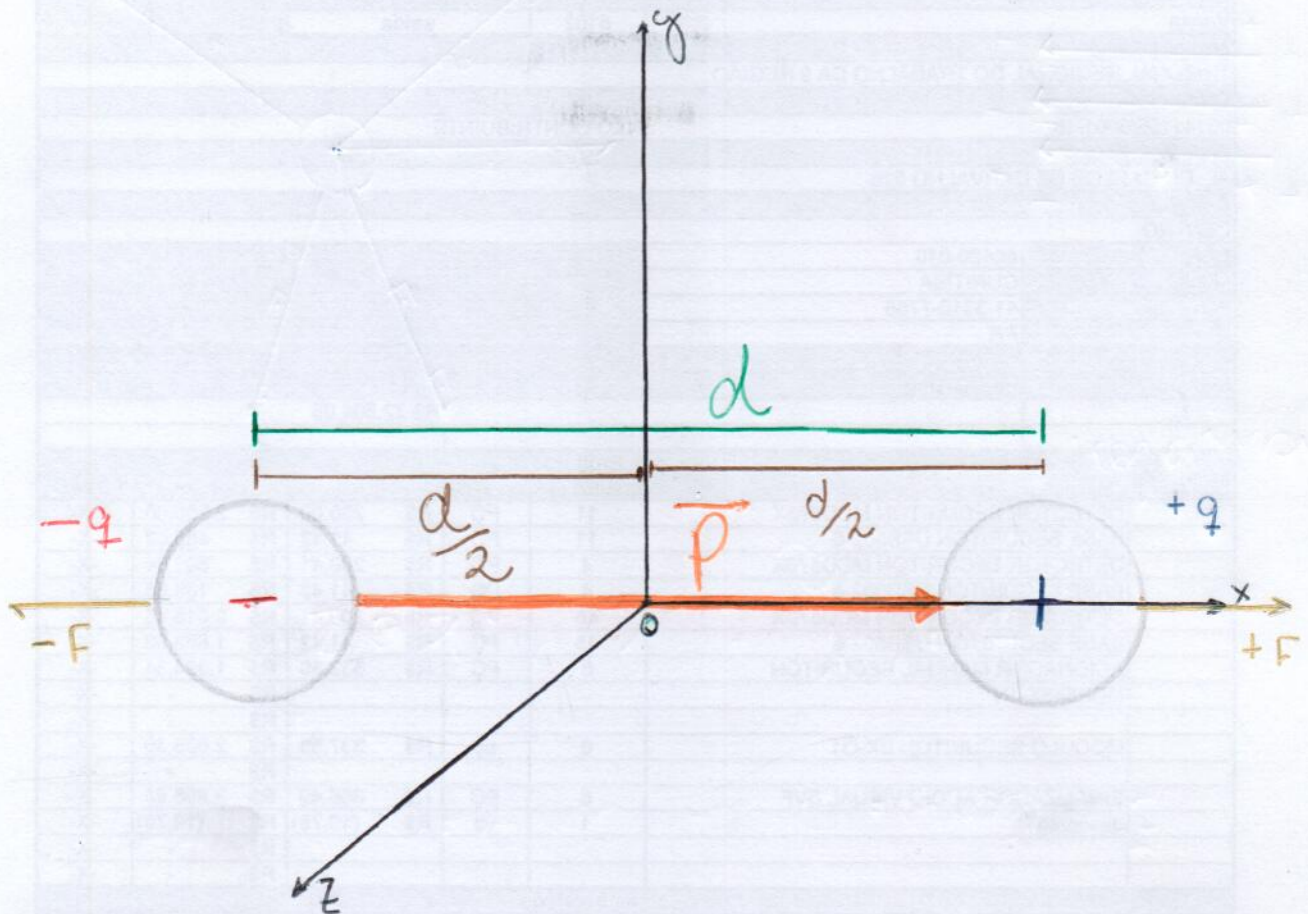
$$E \cdot \cos\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 0 \therefore \theta = 90^\circ \pm 180$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Examples:



Eletrostática (pt. 30)



* Momento de dipolo resultante

O momento dipolo é um vetor, por isso deve-se analisar o momento de dipolo de forma vetorial.

$$|\vec{p}| = q \cdot \frac{d}{2}$$

* Ele é definido dessa forma, pois nos resultados futuros nos ajudará a compreender seu significado, e "simplificar" equações.

* No dipolo, o \vec{p} resultante é:

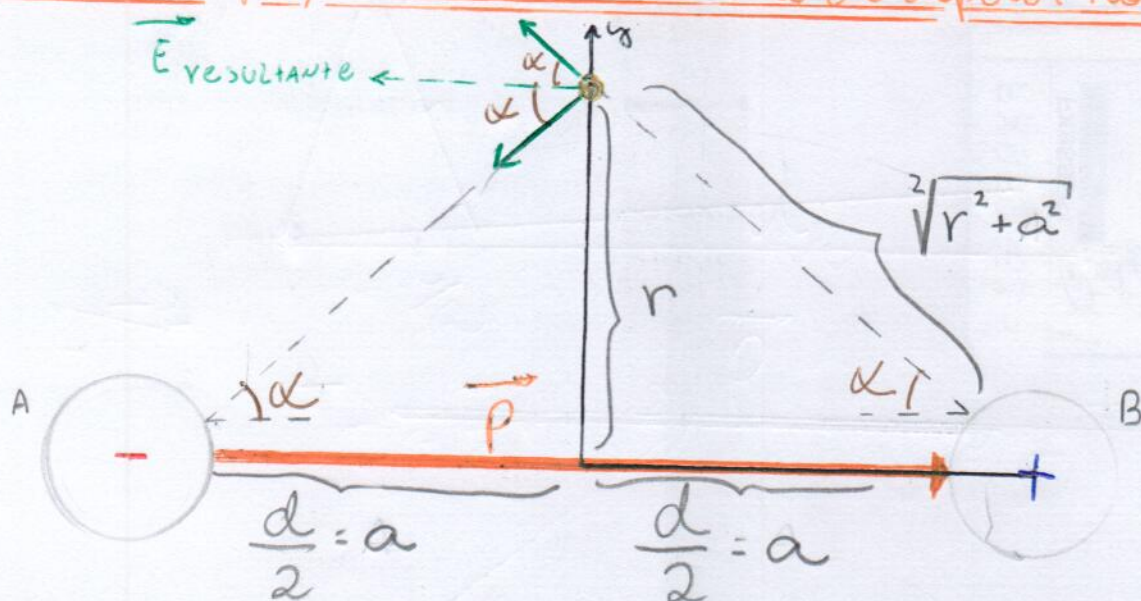
$$\vec{p} = 2 \cdot q \cdot \frac{d}{2}$$

$$p = 2 \cdot q \cdot d$$

Eletrostática (pt. 11)

* Campo elétrico resultante de um dipolo

Resultante perpendicular ao momento de dipolo (no caso específico)



* Como $\vec{E} = k \cdot \frac{|q|}{d^2} \rightarrow \vec{E}_y = k \cdot \frac{|q|}{(\sqrt{r^2 + a^2})^2} \therefore \boxed{\vec{E} = \frac{k \cdot q}{(r^2 + a^2)}}$

Como \vec{E} é um vetor, $\vec{E}_{\text{resultante}} = 2 \cdot E_y \cdot \cos \alpha \rightarrow$

$\rightarrow \vec{E}_{\text{res}} = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)} \cdot \cos \alpha$, como $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \rightarrow$

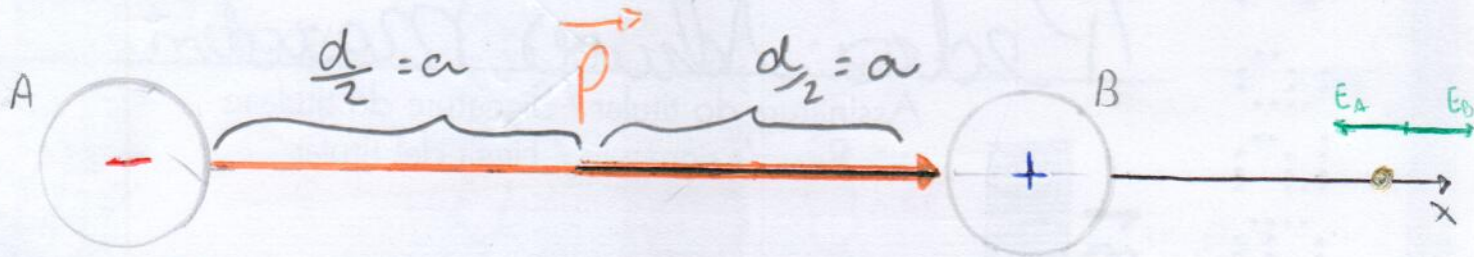
$\rightarrow \vec{E}_{\text{res}} = \frac{2 \cdot q \cdot a}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2) \sqrt{r^2 + a^2}} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}}$

Como na "realidade" $a \rightarrow 0$, podemos considerar $r \gg a$

$\boxed{\vec{E}_{\text{resultante}} = \frac{k \cdot \vec{p}}{r^3}}$

Eletrostática (pt. 12)

Campo elétrico resultante em um ponto no eixo x



Como $\vec{E} = \frac{k \cdot |q|}{d^2}$, $\vec{E}_{\text{resultante}} = \vec{E}_A + \vec{E}_B \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{E}_{\text{res}} = -\left(\frac{k \cdot |q|}{(r+a)^2}\right) + \frac{k \cdot |q|}{(r-a)^2} \rightarrow \vec{E}_{\text{res}} = k \cdot |q| \cdot \left(\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2}\right)$$

$$\rightarrow \vec{E}_{\text{res}} = k \cdot |q| \cdot \left(\frac{(r+a)^2 - (r-a)^2}{(r-a)^2 \cdot (r+a)^2}\right)$$

Como na "realidade", $a \rightarrow 0$, $r \gg a$

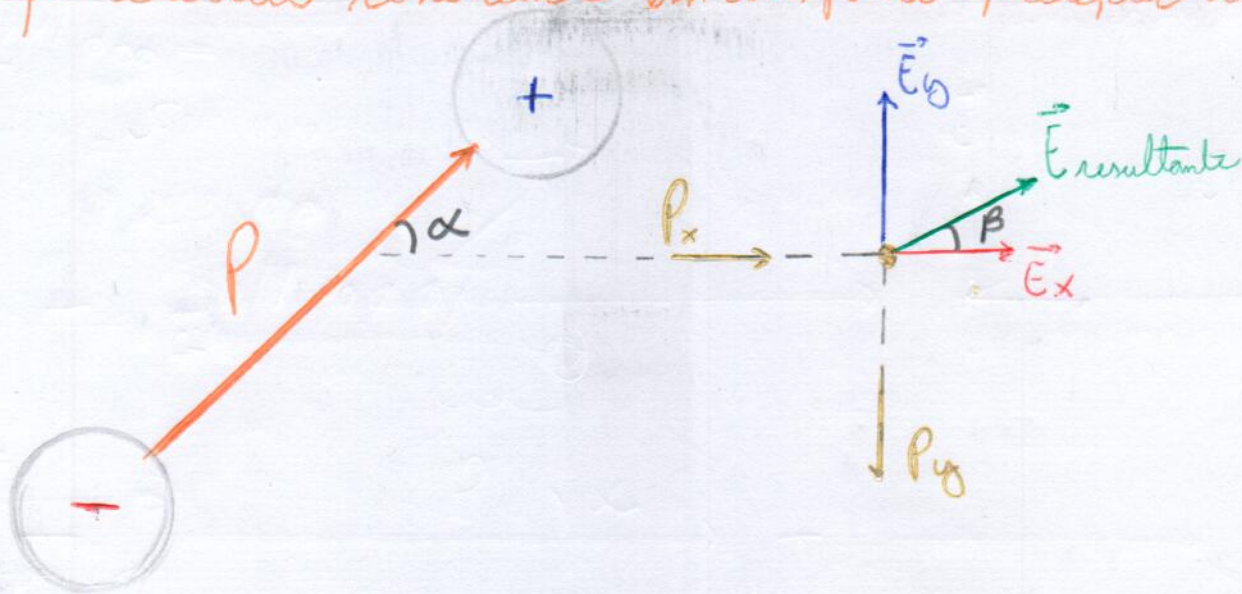
$$\vec{E}_{\text{res}} \approx k \cdot |q| \cdot \left(\frac{r^2 + 2 \cdot a \cdot r + a^2 - r^2 + 2 \cdot a \cdot r - a^2}{r^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \cdot r^2 \cdot \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{res}} \approx \frac{k \cdot |q| \cdot 4a \cdot r}{r^4} \rightarrow \vec{E}_{\text{res}} \approx \frac{k \cdot |q| \cdot a \cdot 4}{r^3}$$

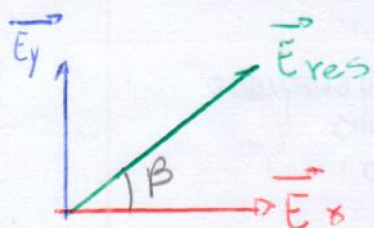
$$\vec{E}_{\text{res}} = \frac{k \cdot P \cdot 2}{r^3}$$

Eletrostática (p. 12)

Campo elétrico resultante em um ponto qualquer do plano



$$P_y = P \cdot \sin \alpha \quad \text{e} \quad P_x = P \cdot \cos \alpha$$



$$\vec{E}_{\text{res}} = \sqrt{(\vec{E}_y^2 + \vec{E}_x^2)} \quad \text{e} \quad \tan \beta = \frac{\vec{E}_y}{\vec{E}_x}$$

* Como $\vec{E}_y = \frac{k \cdot P_y}{r_y^3}$ e $\vec{E}_x = \frac{2 \cdot k \cdot P_x}{r_x^3}$

$$\vec{E}_{\text{res}} = \sqrt{\left(\frac{k \cdot P_y}{r_y^3}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot k \cdot P_x}{r_x^3}\right)^2} = \sqrt{\frac{k^2 \cdot P_y^2}{r_y^6} + \frac{k^2 \cdot P_x^2 \cdot 4}{r_x^6}}$$

Substituindo P_x e P_y : $\vec{E}_{\text{res}} = \sqrt{\frac{4k^2 P^2 \cos^2 \alpha}{r_x^6} + \frac{k^2 P^2 \sin^2 \alpha}{r_y^6}}$

$$\vec{E}_{\text{res}} = \sqrt{k^2 \cdot P^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot \cos^2 \alpha}{r_x^6} + \frac{\sin^2 \alpha}{r_y^6} \right)} = k \cdot P \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \cos^2 \alpha}{r_x^6} + \frac{(1 - \cos^2 \alpha)}{r_y^6}}$$

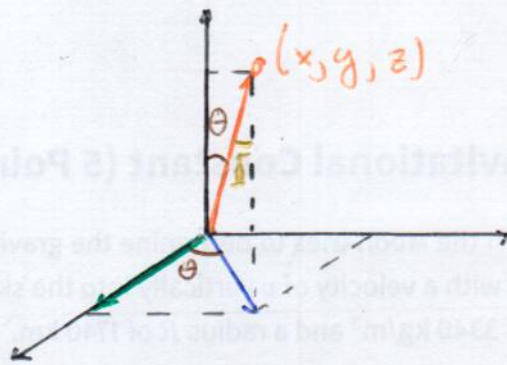
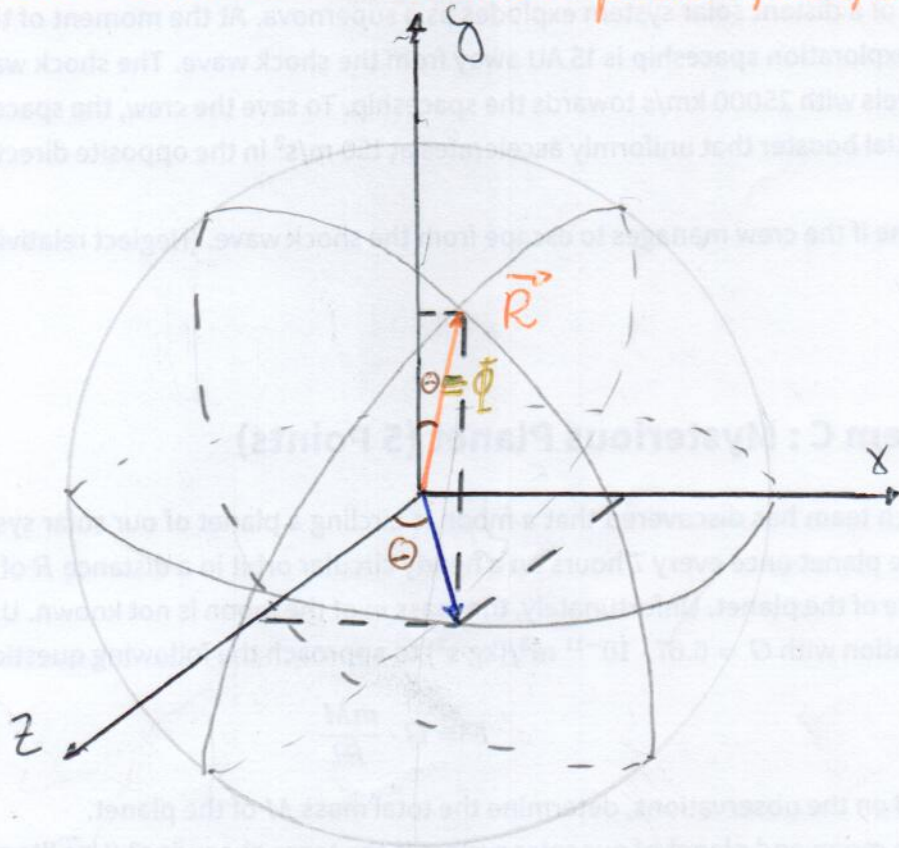
$$\vec{E}_{\text{res}} = k \cdot P \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \cos^2 \alpha \cdot r_y^6 + (1 - \cos^2 \alpha) \cdot r_x^6}{r_x^6 \cdot r_y^6}}$$

$$\tan \beta = \frac{\frac{k \cdot P_y}{r_y^3}}{\frac{2 \cdot k \cdot P_x}{r_x^3}} = \frac{P_y}{r_y^3} \cdot \frac{r_x^3}{2 P_x}$$

$$\tan \beta = \frac{P \sin \alpha}{2 P \cos \alpha} \cdot \frac{r_x^3}{r_y^3}$$

Eletrostática (pt. 34)

Campo elétrico resultante em um ponto qualquer no espaço



$$\begin{aligned} * x &= R \cdot \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \Theta \\ * y &= R \cdot \text{cos } \phi \\ * z &= R \cdot \text{sen } \phi \cdot \text{cos } \Theta \end{aligned}$$

$$\vec{R} = (R \text{sen } \phi \text{ sen } \Theta; R \text{cos } \phi; R \text{sen } \phi \text{ cos } \Theta)$$

$$\hat{U}_R = \frac{\vec{R}}{R} = (\text{sen } \phi \text{ sen } \Theta; \text{cos } \phi; \text{sen } \phi \text{ cos } \Theta)$$

Electrostatics (pt. 15)

Continuação ponto no espaço.

$$\hat{U}_\phi = (\text{sen}\theta \cdot \cos\phi, -\text{sen}\phi, \cos\theta \cdot \cos\phi)$$

$$\ast \hat{U}_\phi \cdot \hat{U}_R = (\text{sen}\phi \cdot \text{sen}\theta \cos\phi, \text{sen}\phi \cos\theta) \cdot (\text{sen}\theta \cos\phi, -\text{sen}\phi, \cos\theta \text{sen}\phi)$$

$$\rightarrow \hat{U}_\phi \cdot \hat{U}_R = \text{sen}\phi \cdot \text{sen}^2\theta \cos\phi - \cos^2\theta \cdot \text{sen}\phi \cos\phi$$



\hat{U}_ϕ e \hat{U}_R não são perpendiculares portanto:

$$\hat{U}_R \cdot \hat{U}_\phi = 0$$

$$\hat{U}_\theta = \hat{U}_R \times \hat{U}_\phi \equiv \hat{U}_\theta \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\phi & \text{sen}\phi \cos\theta \\ \text{sen}\theta \cos\phi & -\text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\theta \end{vmatrix}$$

$$\hat{U}_\theta = \cos^2\phi \cos\theta \hat{i} + \text{sen}\phi \cos\phi \text{sen}\theta \cos\theta \hat{j} - \text{sen}^2\phi \text{sen}\theta \cdot \hat{k} - \cos^2\phi \text{sen}\theta \hat{k} + \text{sen}^2\phi \cos\theta \hat{i} - \text{sen}\phi \cos\phi \text{sen}\theta \cos\theta \hat{j}$$

$$\hat{U}_\theta = (\cos\theta, 0, -\text{sen}\theta)$$

Eletrostática (pt. 16)

Continuação do campo elétrico em um ponto qualquer do espaço:

$$\vec{P} \hat{i} = 2 \cdot q \cdot a \cdot \hat{i} = (P, 0, 0) = \vec{P}$$

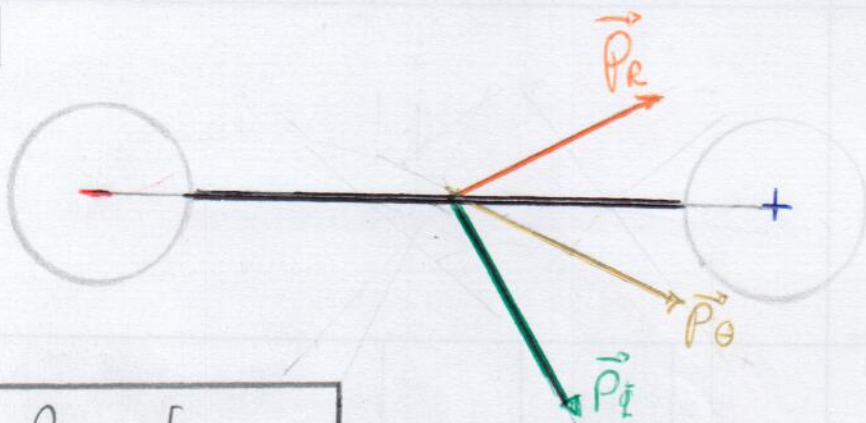
$$\vec{P} \cdot \hat{U}_R = (P, 0, 0) (\text{sen } \phi \text{ sen } \theta, \text{cos } \phi, \text{sen } \phi \text{ cos } \theta) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{P} \cdot \hat{U}_R = P \cdot \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \theta = \vec{P}_R}$$

$$\vec{P} \cdot \hat{U}_\phi = (P, 0, 0) (\text{sen } \theta \text{ cos } \phi, -\text{sen } \phi, \text{cos } \phi \text{ cos } \theta) = P \text{sen } \theta \text{ cos } \phi$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{P} \cdot \hat{U}_\phi = \vec{P}_\phi = P \text{sen } \theta \text{ cos } \phi}$$

$$\vec{P} \cdot \hat{U}_\theta = (P, 0, 0) (\text{cos } \theta, 0, -\text{sen } \theta) = P \text{cos } \theta = P_\theta$$



$$\boxed{\vec{E}_R = \frac{2k_0 \cdot P \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \theta}{r^3}}$$

$$\boxed{\vec{E}_\theta = \frac{k \cdot P \text{cos } \theta}{r^3}}$$

$$\boxed{\vec{E}_\phi = \frac{k \cdot P \text{sen } \theta \text{ cos } \phi}{r^3}}$$

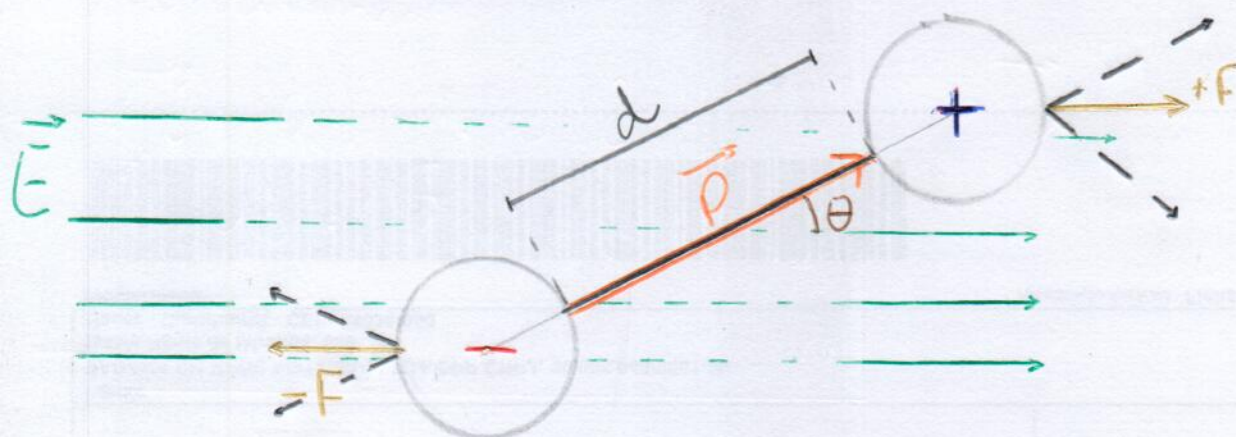
$$E_{\text{resultante}} = \sqrt{\vec{E}_\theta^2 + \vec{E}_R^2 + \vec{E}_\phi^2} \rightarrow$$

$$E_{\text{res}} = \sqrt{\left(\frac{k \cdot P \text{cos } \theta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot k \cdot P \text{sen } \phi \text{sen } \theta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot P \text{sen } \theta \text{cos } \phi}{r^3}\right)^2}$$

$$\boxed{E_{\text{res}} = \sqrt{\frac{\text{cos}^2 \theta + 4 \cdot \text{sen}^2 \phi \cdot \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \phi}{r^3}} \cdot k \cdot P}$$

Eletrostática (pt. 37)

Torque em um dipolo



$$+\vec{F} = +q \cdot \vec{E}$$

$$-\vec{F} = -q \cdot \vec{E}$$

* Decompondo as forças temos:

$$+\vec{F}_\theta = +q \cdot E \cdot \text{sen} \theta, \quad \vec{F} = -q \cdot E \cdot \text{sen} \theta \rightarrow$$

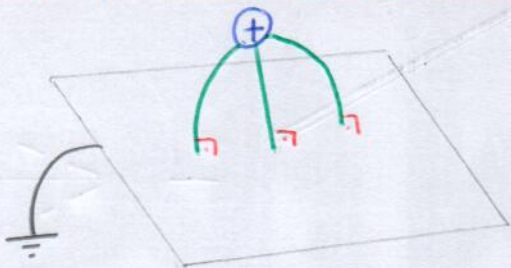
→ Como torque (τ) = Força · distância →

$$\rightarrow \tau = \underbrace{d \cdot q \cdot E}_{p} \cdot \text{sen} \theta \therefore |\vec{\tau}| = |\vec{p} \times \vec{E}| = p \cdot E \cdot \text{sen} \theta$$

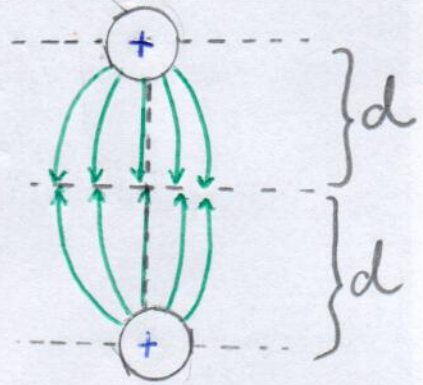
Electrostática (pt. 58)

Método das Imagens

* Condutores planos aterrados e carga de teste próxima

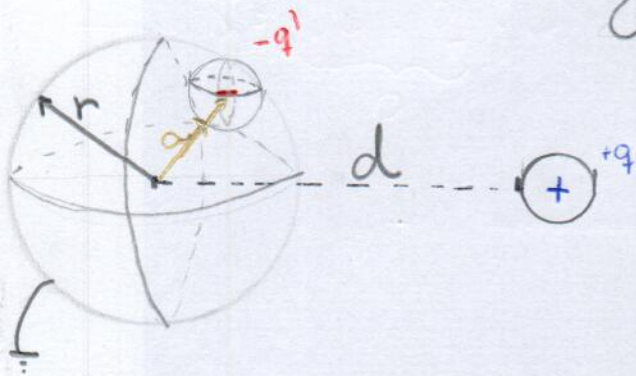


Como aterrado o potencial da placa é 0.



$$F_{el} = \frac{k \cdot q \cdot q}{(2 \cdot d)^2} = \frac{k \cdot q^2}{4 \cdot d^2}$$

* Condutores esféricos aterrados



Como $-q'$ está em contato com a esfera, seu potencial é 0.
∴ $+q'$ dentro de esfera (em contato)

$$\frac{-k \cdot q'}{(r-a)} + \frac{k \cdot q}{(d-r)} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{k \cdot q}{(r-d)} = \frac{k \cdot q'}{(r-a)} \therefore q' = \frac{q \cdot (r-a)}{(d-r)}$$

* q' fora de esfera (em contato)

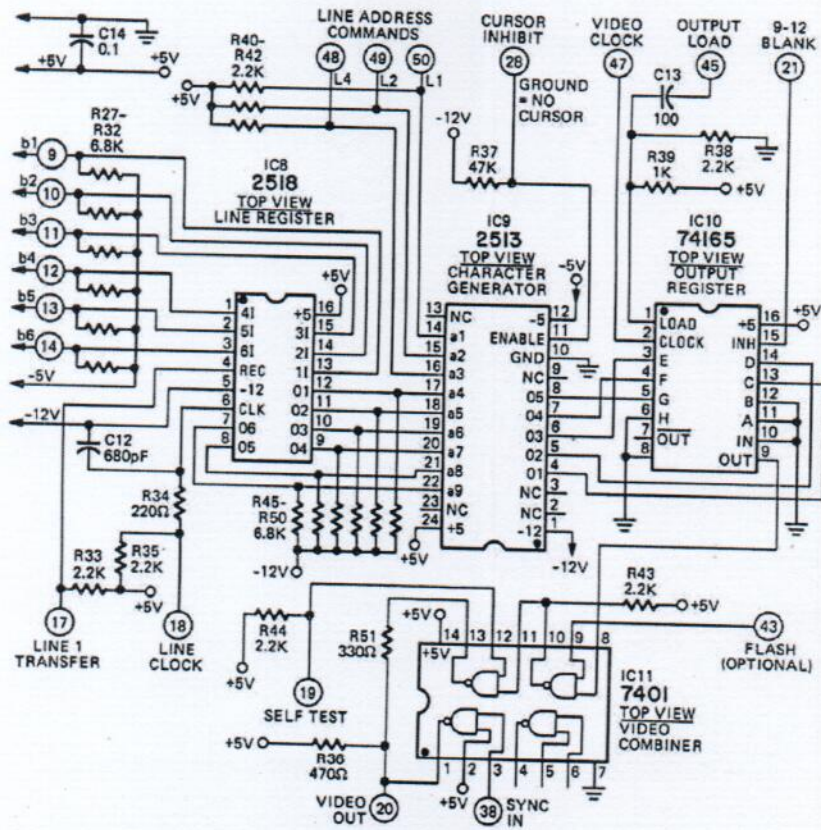
$$\frac{-k \cdot q'}{(r+a)} + \frac{k \cdot q}{(r+d)} = 0 \therefore q' = \frac{q \cdot (r+a)}{(r+d)}$$

$$\frac{q'(r-a)}{(r-d)} = \frac{q'(r+a)}{(r+d)} \rightarrow$$

$$\rightarrow (r-a) \cdot (r+d) = (r+a) \cdot (d-r) = r^2 - r \cdot a + r \cdot d - a \cdot d = r^2 - r \cdot a + r \cdot d + a \cdot d$$

$$\rightarrow -r \cdot a - a \cdot d = +r \cdot a + a \cdot d \rightarrow 2r^2 = 2 \cdot a \cdot d \therefore a = \frac{r^2}{d}$$

ELECTRODYNAMIC

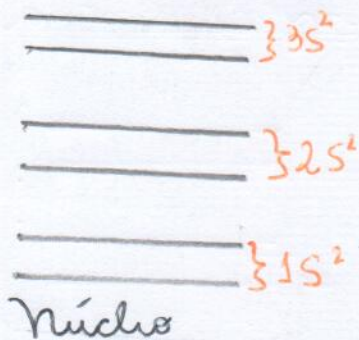


Eletrodinâmica

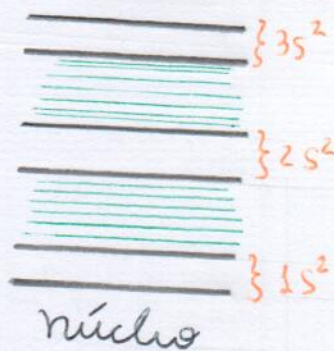
Ligação metálica

Um átomo de caráter metálico tem certa característica, entretanto ao estar em um conjunto com vários átomos de caráter metálico existe uma "banda" de elétrons no seu orbital, influenciando no seu salto

Átomo isolado:



Átomo isolado em conjunto



* Quando em conjunto, o átomo de caráter metálico possui uma nuvem de elétrons entre seus orbitais. Esta zona é conhecida como "zona proibida", pois outros tipos de átomo não possuem esta característica. Quanto mais se distancia do núcleo menor é a "zona proibida".

* Quando o átomo é excitado, o elétron tem a capacidade de se movimentar pelos orbitais.

Malleabilidade

pele fato de possuírem os elétrons com capacidade de se movimentar, o conjunto de átomos metálicos ao sofrer um trabalho mecânico, seus elétrons conseguem se redistribuir favorecendo a malleabilidade

Bulho

* Fótons que possuem energia equivalente ou maior a energia de ionização, ao entrarem em contato com o conjunto metálico de excitar os elétrons, fazendo com que ao voltarem para o estado original liberem um fóton.

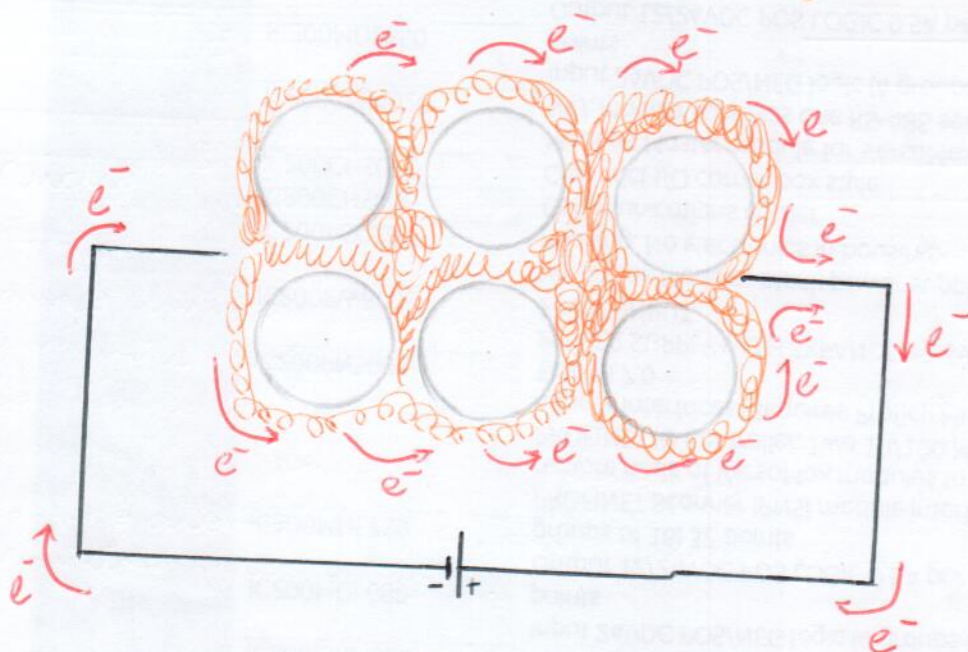
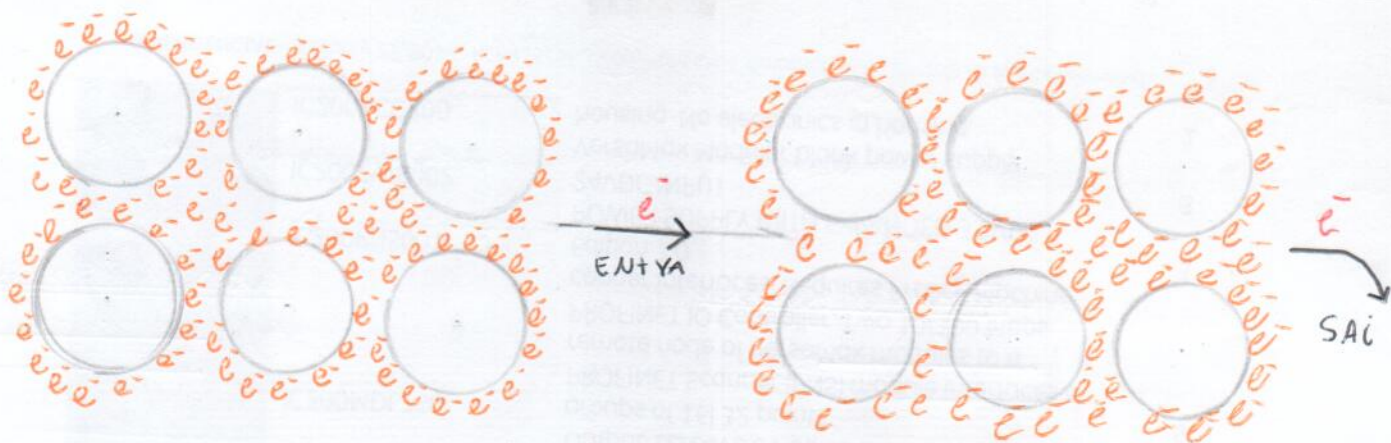
* Caso a luz γ tenha energia suficiente para excitar o elétron, irá gerar uma corrente elétrica

Condutibilidade térmica

Oscilações criadas no sistema devido ao aumento da temperatura, são distribuídas pelos átomos, favorecendo a condutibilidade térmica. Isso ocorre devido a maneira que os átomos se posicionam entre si

Eletrodinâmica (pt. 2)

Condutividade elétrica do metal



* A excitação a partir de uma D.D.P não causa uma movimentação ordenada de elétrons, fazendo-se presente uma corrente elétrica

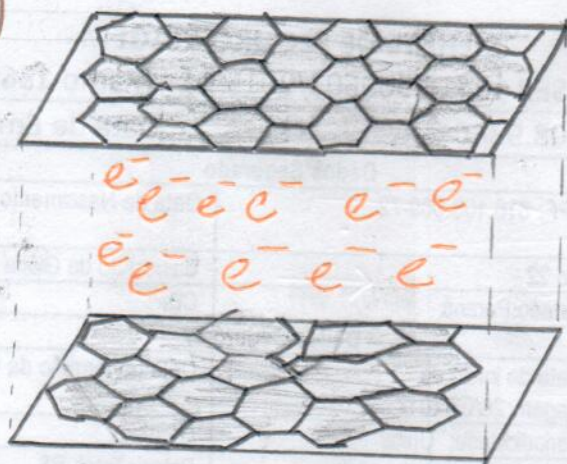
* Colisões, como as causadas pelo aumento da temperatura, fazem com que os elétrons se aproximem. Quando os elétrons ficam mais próximos a probabilidade de choque entre eles é maior, aumentando o efeito Joule e com isso diminuindo a condutividade

Eletrodinâmica (pt. 3)

Semi-condutores

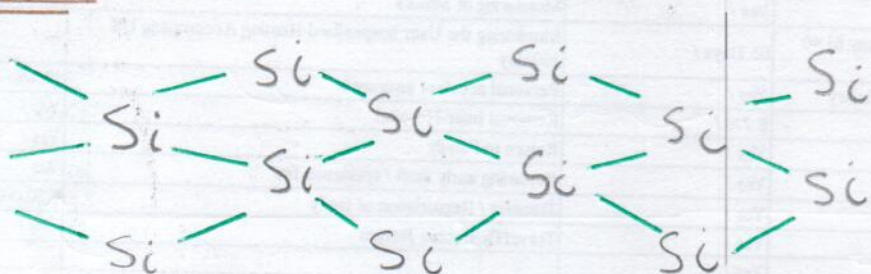
Substâncias de rede covalente

Carbono grafite (sp^2)



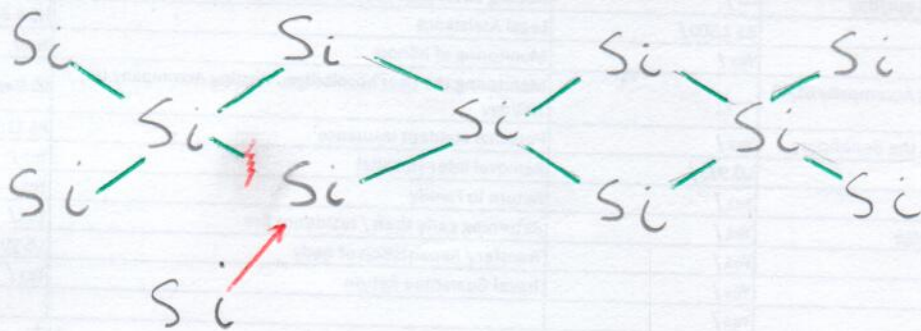
O carbono grafite tem uma estrutura planificada, sob a forma de uma rede cristalina. O fato de ter esse arranjo faz com que elétrons livres se formem entre as "placas" de grafite, possibilitando a passagem e existência de uma corrente.

Silício (Si)



As ligações da molécula de silício são localizadas.

Com o aquecer a molécula, o estado de agitação vai aumentar e com isso as oscilações podem ter a capacidade de romper ligações. Mas quando uma se quebra outra se forma, para manter a estabilidade da rede covalente.



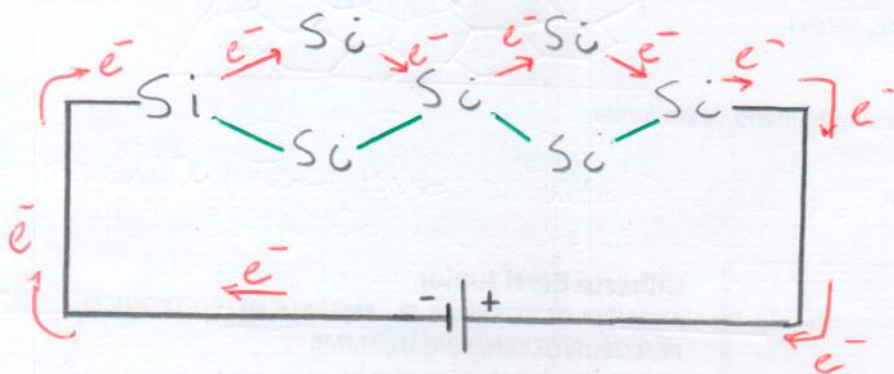
Eletrodinâmica (pt. 4)

Semicondutores

Silício (continuação)

Com a quebra das ligações e o surgimento de lacunas, um deslocamento de elétrons está ocorrendo. Se conectarmos uma D.D.P., podemos ordenar o deslocamento e fazer com que uma corrente ordenada exista.

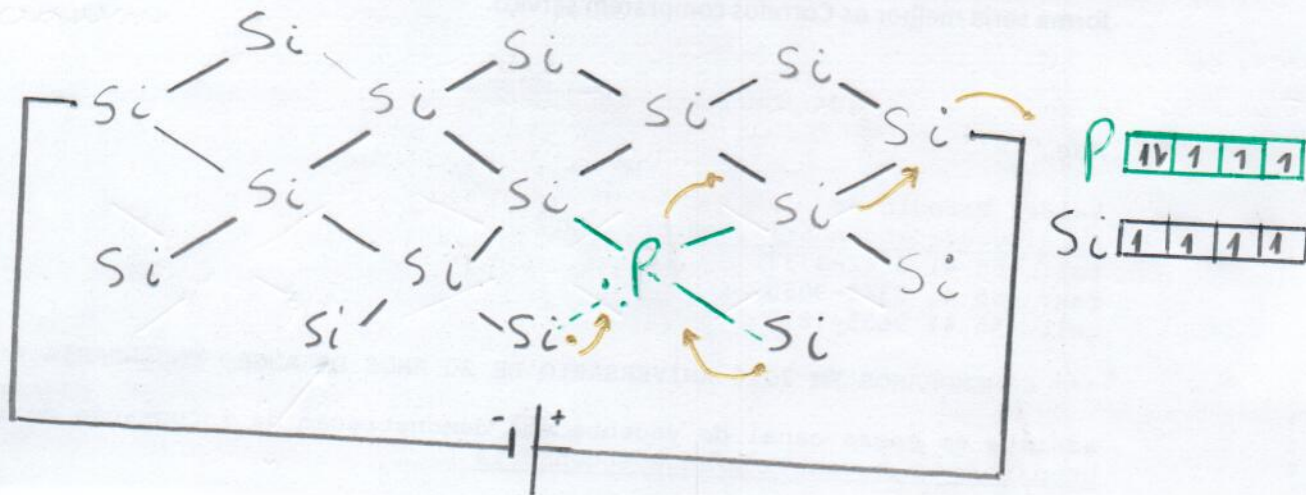
Como o aumento da temperatura favorece a quebra de ligações, a corrente elétrica é favorecida também com o aumento da temperatura.



A corrente elétrica, mesmo que favorecida pela temperatura, continua baixa se comparada com os metais. Mas existe formas de melhorar a corrente, a técnica é chamada de dopagem.

Dopagem tipo N no Excesso de elétrons

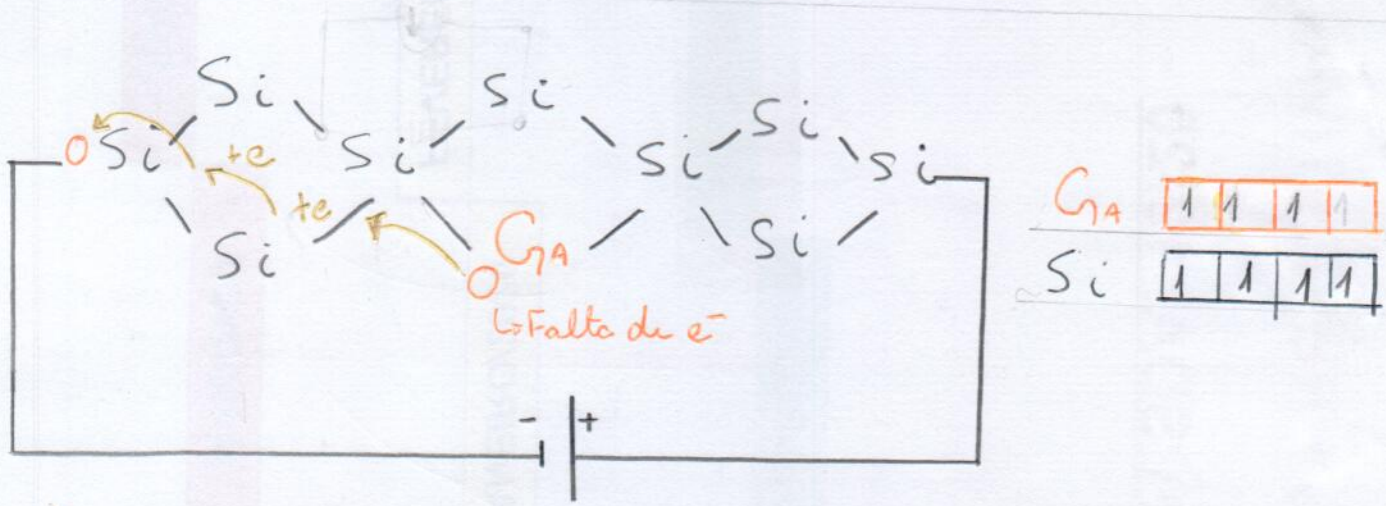
Adicionando elementos do grupo 15, como o P, Sb, As, Bi, (o N não, pois por possuir alta eletronegatividade e tamanho pequeno afeta de maneira prejudicial no fluxo de elétrons). Causaremos um excesso de elétrons.



Eletrodinâmica (pt. 5)

Dopagem tipo P → Falta de elétrons.

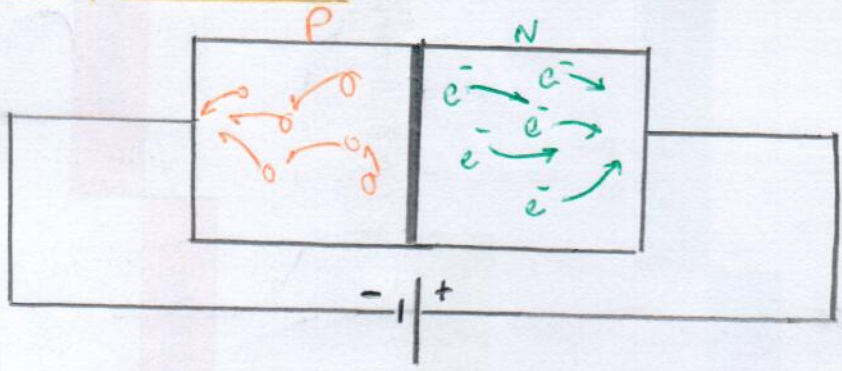
Adicionando elementos do grupo 13, como o Al, Ga, In, causa uma falta de elétrons, gerando um espaço vazio que necessita ser preenchido.



Junção PN

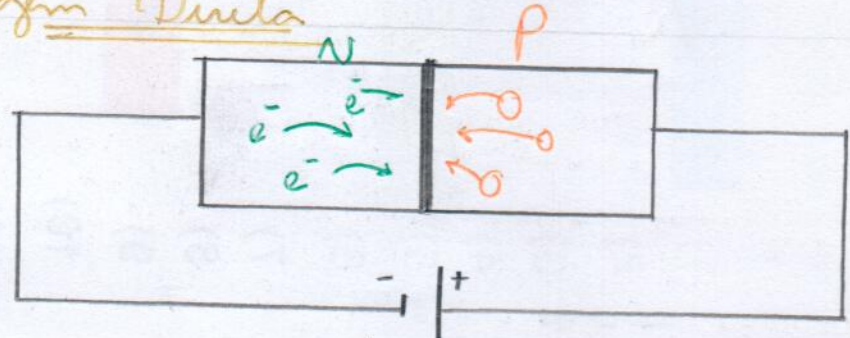
Vamos misturar os 2 tipos de dopagem

Montagem reversa



Não ocorre a passagem de corrente

Montagem Direta

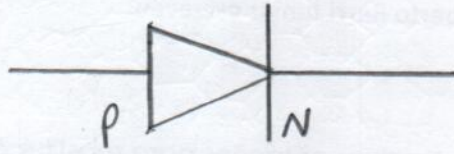


Existe corrente elétrica

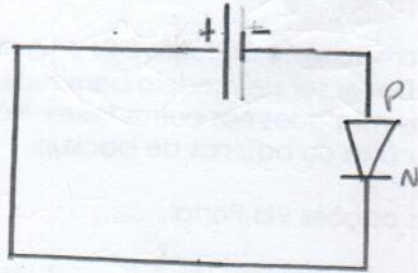
Eletrodinâmica (pt. 6)

Diodo

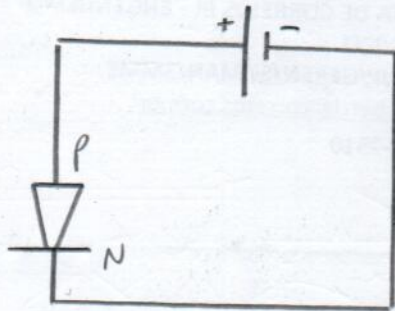
o diodo é um elemento de circuito que é representado:



* No circuito, se colocado desta maneira não passa corrente

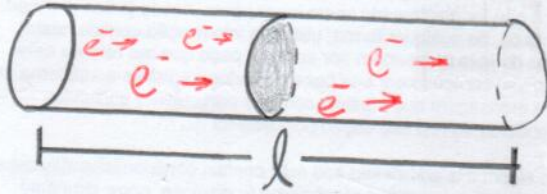


* Já se posto desta maneira existe corrente.



Eletrodinâmica (pt. 7)

Corrente média



$$i_{med} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\text{Número de } e^-}{\frac{l}{v_{med}}} = \frac{v_{med} \cdot n \cdot e^-}{l} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow n = \frac{\text{massa}}{\text{massa molar}} = \frac{N \cdot \text{de moléculas}}{N \cdot \text{de átomos}} \therefore \boxed{N = \frac{m \cdot N_{avogadro}}{M}}$$

$$\text{Como densidade} = \frac{m}{V} \rightarrow d = \frac{m}{\text{Átomos} \cdot l} \therefore \boxed{m = d \cdot A \cdot l}$$

$$\text{Substituindo temos: } N = \frac{d \cdot A \cdot l \cdot N_a}{M} \longrightarrow$$

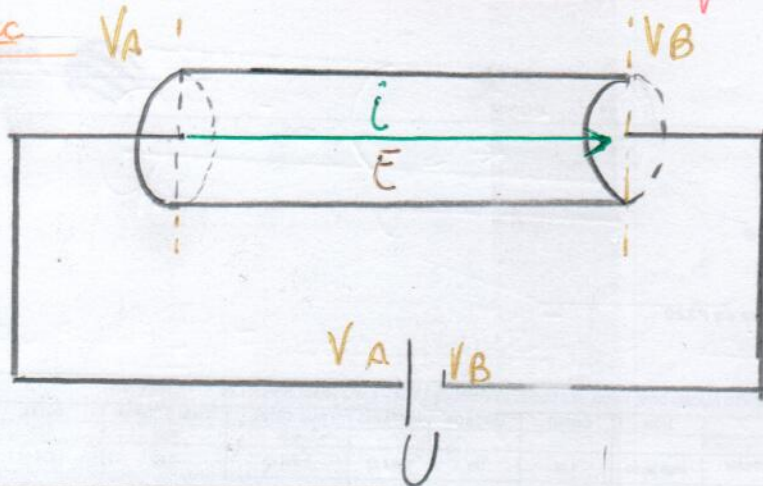
$$\longrightarrow i_{med} = \frac{d \cdot A \cdot l \cdot N_a \cdot e^- \cdot v_{med}}{M} \quad M \cancel{.}$$

$$\boxed{i_{med} = \frac{d \cdot A \cdot N_a \cdot e^- \cdot v_{med}}{M}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{v_{med} = \frac{i_{med} \cdot M}{d \cdot A \cdot N_a \cdot e^-}}$$

Eletrodinâmica (pt. 8)

Resistência



$$\mathcal{Z}_{el} = e \cdot U = \Delta E \text{ em}$$

$$F_{ele} = m_e \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow e \cdot E = m_e \cdot a \quad \therefore \quad a = \frac{e \cdot E}{m_e}$$

$$\text{Como } v = v_0 + a \cdot t \rightarrow v_{\text{med}} = \frac{e \cdot E}{m_e} \cdot \Delta t \rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{e \cdot E \cdot \Delta t}{2 m_e}$$

Considerando $\bar{E} =$ Tempo livre médio (período sem colisões) \rightarrow

$$\rightarrow v_{\text{med}} = \frac{e \cdot E \cdot \bar{\Delta t}}{m_e} = \frac{i \cdot M}{d \cdot A \cdot N_A \cdot e} \quad \therefore \quad E = \frac{U}{l} = \frac{m_e \cdot c \cdot M \cdot i}{d \cdot A \cdot N_A \cdot e^2 \cdot \Delta t}$$

$$\rightarrow U = \frac{m_e \cdot M}{d \cdot N_A \cdot e^2 \cdot \Delta t} \cdot \frac{l}{A} \cdot i \quad \rightarrow \frac{m_e \cdot M}{d \cdot N_A \cdot e^2 \cdot \Delta t} \equiv \text{Resistividade } (\rho)$$

$$U = \rho \cdot \frac{l}{A} \cdot i$$

Condutividade

$$U = \rho \cdot \frac{l}{A} \rightarrow \frac{U}{l} = \rho \cdot \frac{i}{A}$$

$$\rightarrow *E = \rho \cdot j$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E} \quad \therefore \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

* $\sigma \equiv$ Condutividade

* $\rho \equiv$ Resistividade

Eletrodinâmica (pt. 9)

Variação da resistividade com a temperatura (Condutores Metálicos)

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad \alpha = 60$$

α = Coeficiente térmico da resistividade

Como $R = \rho \cdot \frac{l}{A} \rightarrow R = \rho_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot \frac{l}{A}$

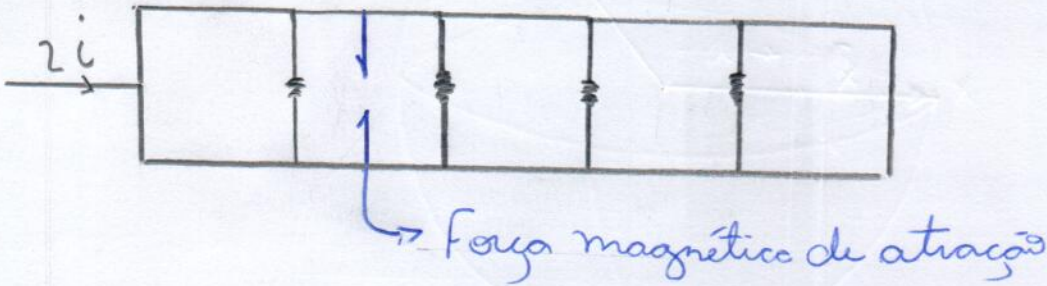
* A resistividade aumenta com o aumento da temperatura, isso para condutores metálicos

* Obs.: A dilatação do fio com o aumento da temperatura causa "nenhum" efeito importante na resistividade, portanto pode ser ignorado.

Eletrodinâmica (pt. 30)

Aparelhos de medida: Galvanômetro

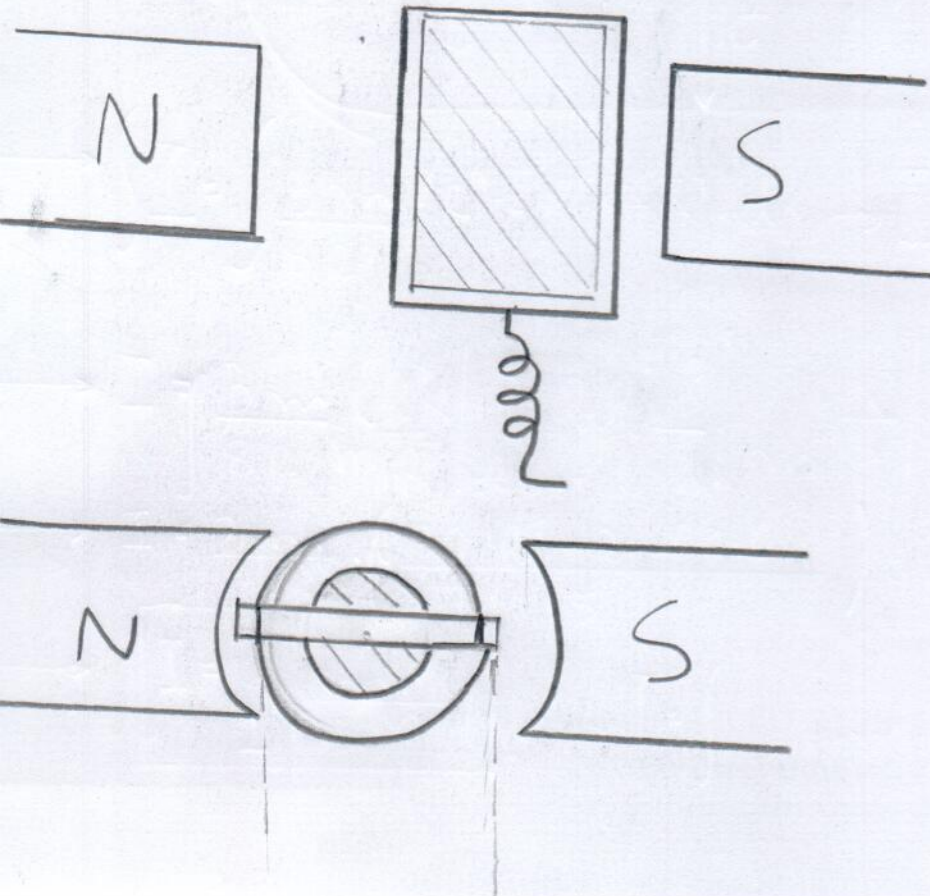
Como a força magnética varia com a corrente William Sturgeon teve a inicial ideia de medir a força magnética e com isso calcular a corrente. Anos após D'Arsonval aprimorou esta ideia.



Como $F_{\text{mag}} = B \cdot i \cdot l \cdot \text{sen } 90^\circ$ e $B = \frac{\mu \cdot i}{2\pi \cdot d} \rightarrow$

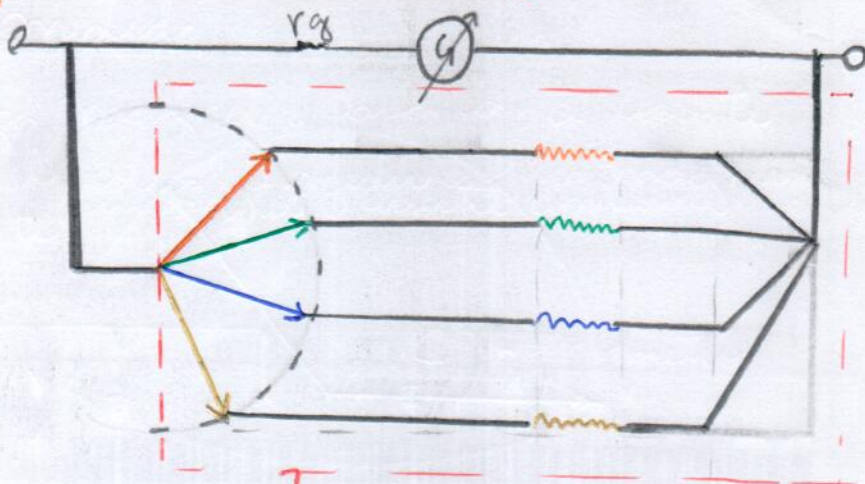
$F_{\text{mag}} = \frac{\mu \cdot i^2}{2\pi \cdot d} = F_{\text{elástica da mola}} \therefore \frac{\mu \cdot i^2}{2\pi \cdot d} = k \cdot \Delta x \rightarrow$

$$i = \sqrt{\frac{k \cdot \Delta x \cdot 2\pi \cdot d}{\mu}}$$



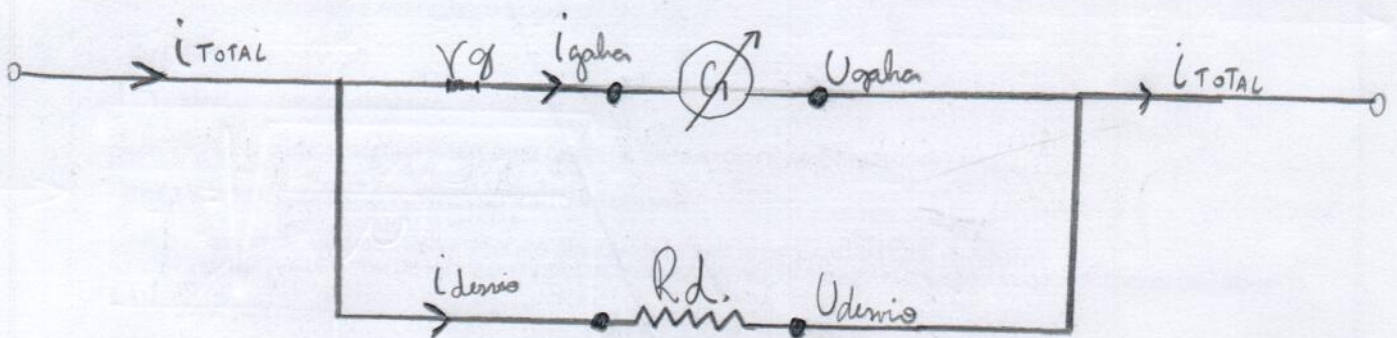
Amperímetros

Eletrodinâmica (pt. 11)



Resistência de derivação → deve para o galvanômetro não queimar

A resistência de derivação (R_d) é associada em paralelo ao galvanômetro, desta forma parte da corrente é desviada.



Como estão em paralelo $U_{galva} = U_{deriva}$

Para o galvanômetro não queimar $r_{galva} \gg R_{deriva} \rightarrow$

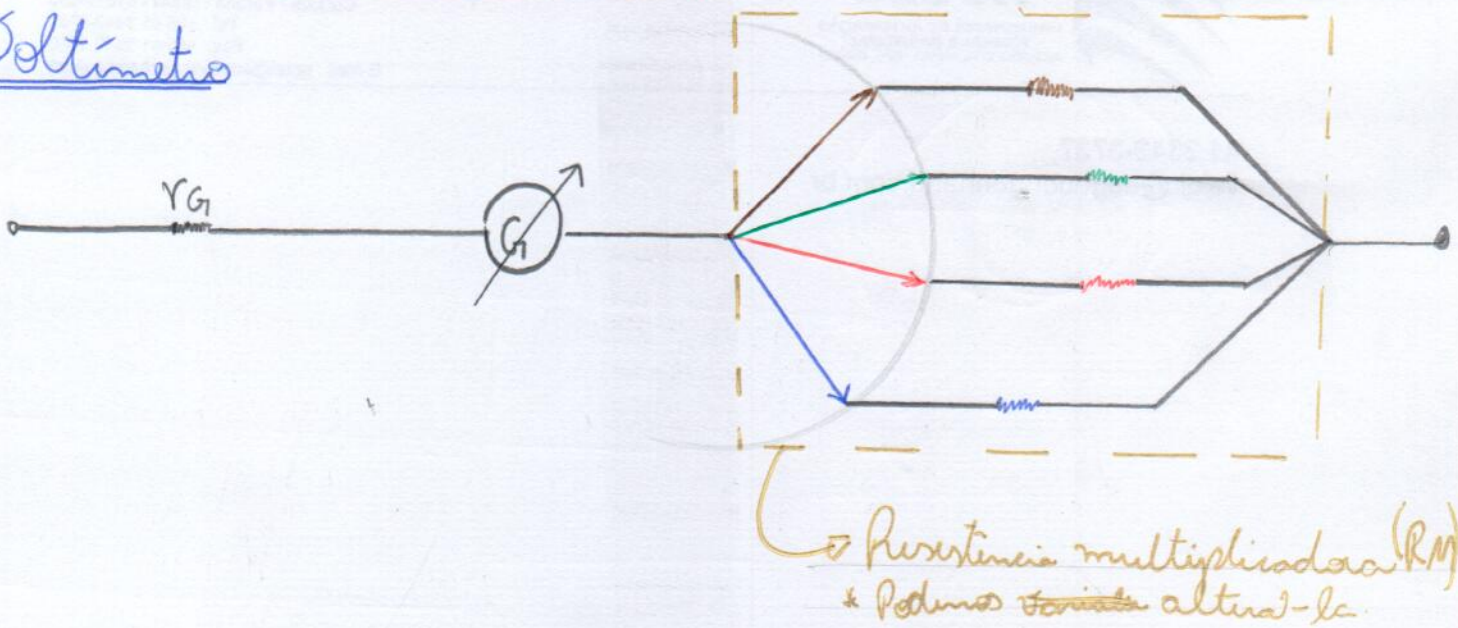
$$\rightarrow r_{galva} \cdot I_{galva} = R_{deriva} \cdot I_{deriva} \therefore I_{deriva} = \frac{r_{galva}}{R_{deriva}} \cdot I_{galva}$$

$$\text{Como } I_{TOTAL} = I_{galva} + I_{deriva} \rightarrow I_{TOTAL} = I_{galva} + I_{deriva} = I_{galva} \left(1 + \frac{r_{galva}}{R_d} \right)$$

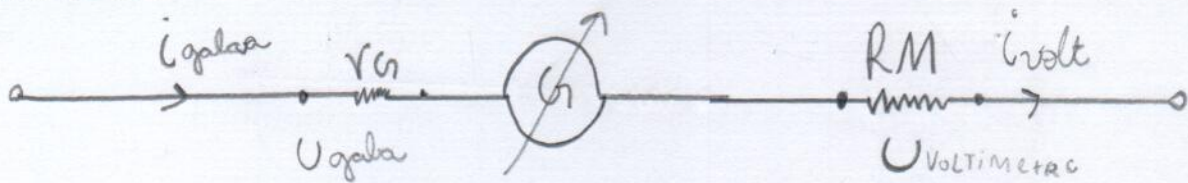
Jacques-Arsène d'Arsonval também inventou o amperímetro

Eletrodinâmica (pt 12)

Voltímetro



O volímetro é construído associado em série entre o galvanômetro e uma resistência.



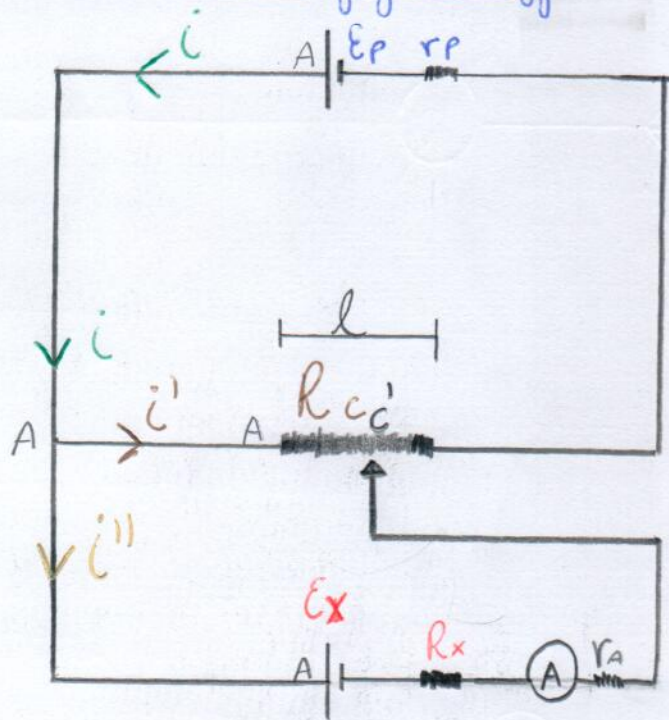
$$i_{galvanômetro} = i_{volímetro} \rightarrow \text{Como } i = \frac{U}{R} \therefore \boxed{\frac{U_{galva}}{R_{galva}} = \frac{U_{volt}}{R_{volt}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow U_{TOTAL} = U_{galva} + U_{volt} \rightarrow U_{volt} = \frac{R_{volt}}{R_{galva}} \cdot U_{galva} \rightarrow$$

$$\rightarrow U_{TOTAL} = U_{galva} + U_{galva} \cdot \frac{R_{volt}}{R_{galva}} \therefore \boxed{U_{TOTAL} = U_g \left(1 + \frac{R_{volt}}{R_{galva}} \right)}$$

Eletrodinâmica (pt. 13)

Potenciômetro de Poggendorf



- * gerador de F. e. m conhecida
- * gerador de F. e. m desconhecida
- * Amperímetro
- * Resistência de fio com cursor.

Quando a corrente que passa no amperímetro é nula o potenciômetro está equilibrado.

$$U_{AC'} = V_A - (V_A - E_x) \therefore \boxed{U_{AC'} = E_x} \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow U_{AC'} &= \rho \cdot \frac{l_{\text{variável}}}{A} \cdot i \\ \longrightarrow U_{AC} &= \rho \cdot \frac{l_{\text{inicial}}}{A} \cdot i \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \longrightarrow U_{AC'} &= \rho \cdot \frac{l_{\text{variável}}}{A} \cdot i \\ \longrightarrow U_{AC} &= \rho \cdot \frac{l_{\text{inicial}}}{A} \cdot i \end{aligned}} \right\} i = i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{U_{AC'}}{U_{AC}} = \frac{\rho \cdot \frac{l_{\text{variável}}}{A} \cdot i}{\rho \cdot \frac{l_{\text{inicial}}}{A} \cdot i} \therefore \frac{U_{AC'}}{U_{AC}} = \frac{l_x}{l_1} = \frac{E_x}{E_p} \therefore \boxed{E_x = E_p \cdot \frac{l_x}{l_1}}$$

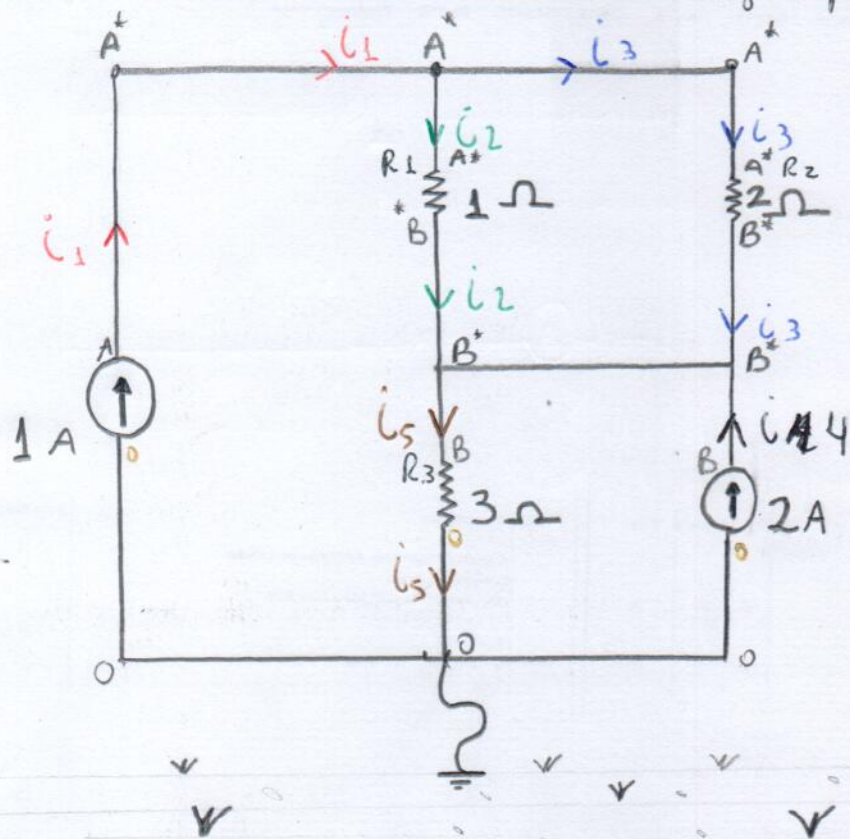
Consegue-se determinar a F. e. m. desconhecida a partir da F. e. m. conhecida e a variação da resistência de fio.

Eletrodinâmica (pt. 13)

Análise nodal

É uma maneira de analisar circuitos, que em certos casos facilita muito.

* Basta arbitrar o sentido das correntes, distribuir potencial, aplicar a lei dos nós e aterrar o circuito em alguns pontos



$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$i_5 = i_2 + i_3 + i_4$$

$$i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_1}$$

$$i_3 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

$$i_5 = \frac{V_B - 0}{R_3}$$

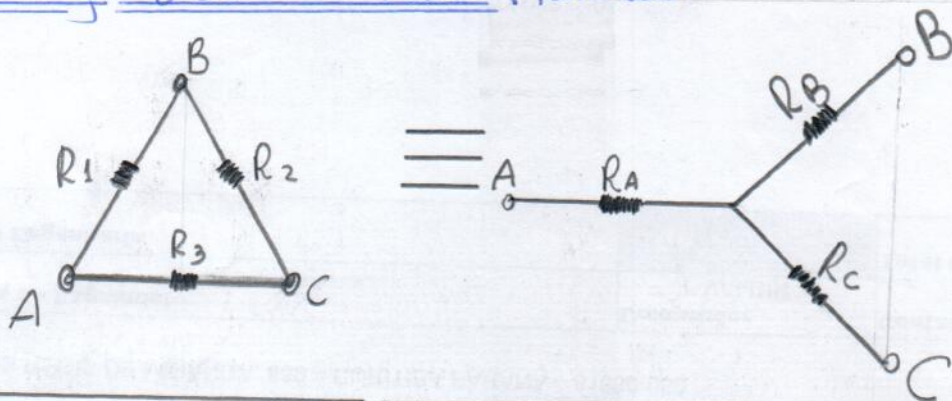
Substituindo temos:

$$\begin{cases} \frac{V_A - V_B}{1} + \frac{V_A + V_B}{2} = 1 \\ 2 + \frac{V_A - V_B}{2} + \frac{V_A - V_B}{2} = \frac{V_B}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3V_A - 3V_B = 2 \\ 9V_A - 5V_B = -12 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_A = \frac{29}{3} \text{ V} \quad \text{e} \quad V_B = 9 \text{ V}$$

Eletrodinâmica (pt. 14)

Transformação delta - estrela: resistores



$$\begin{aligned} * R_A + R_B &= \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & * R_A + R_C &= \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} & * R_B + R_C &= \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

$$* (R_A + R_B) + (R_A + R_C) + (R_B + R_C) = \left[\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + \left[\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + \left[\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right]$$

$$\rightarrow 2R_A + 2(R_B + R_C) = \frac{[R_1(R_2 + R_3)] + [R_3(R_1 + R_2)] + [R_2(R_1 + R_3)]}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\rightarrow 2R_A = \frac{2 \cdot R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \therefore \quad R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$(R_A + R_B) + (R_B + R_C) - (R_A + R_C) = \left[\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + \left[\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] - \left[\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \right]$$

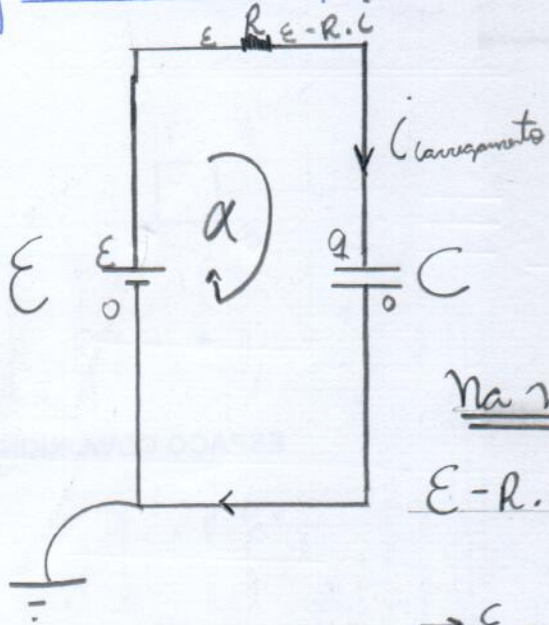
$$\rightarrow 2R_B = \frac{2 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \therefore \quad R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$(R_A + R_C) + (R_B + R_C) - (R_A + R_B) = \left[\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + \left[\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] - \left[\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right]$$

$$2R_C = \frac{2 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \therefore \quad R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Eletrodinâmica (p. 15)

Carga de capacitor



$$U = \frac{q}{C} \quad \text{e} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

Na malha α :

$$E - R \cdot i - \frac{q}{C} = 0; \text{ substituindo } \rightarrow$$

$$\rightarrow E - R \cdot \frac{dq}{dt} = 0 \quad \therefore \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{q}{R \cdot C}$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{E}{R} - \frac{q}{R \cdot C} \rightarrow \frac{d\gamma}{dq} = -\frac{1}{R \cdot C} \quad \therefore \boxed{dq = -R \cdot C \cdot d\gamma}$$

Pedro Schaves na rosin

$$\rightarrow -R \cdot C \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \rightarrow \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{1}{\gamma} d\gamma = -\frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) = -\frac{t}{R \cdot C} \quad * \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) = \ln \gamma - \ln \gamma_0$$

$$\rightarrow \gamma = \gamma_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \rightarrow \text{Como } \gamma = \frac{E}{R} - \frac{q}{R \cdot C} \text{ e em } t=0 \rightarrow q=0$$

$$\rightarrow \frac{E}{R} - \frac{q}{R \cdot C} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \therefore -\frac{q}{R \cdot C} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} - \frac{E}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{q}{C} = E \left(e^{-\frac{t}{R \cdot C}} - 1 \right) \quad \therefore \boxed{q = C \cdot E \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right)}$$

Eletrodinâmica (pt. 16)

Corrente de carga durante o carregamento do capacitor

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \dot{\epsilon} - (\epsilon \cdot d e^{-\frac{t}{RC}}) \therefore i = -\dot{\epsilon} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(\frac{1}{RC}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{i = \frac{\epsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Energia dissipada durante o carregamento

$$Pot \text{ dissipada} = R \cdot i^2 \rightarrow Pot = \frac{dE}{dt} \therefore Pot \cdot dt = dE \rightarrow$$

$$\rightarrow \int dE_{\text{dissipada}} = \int_{t_0}^t Pot_{\text{dissipada}} \cdot dt \rightarrow E_{\text{dissipada}} = \int_0^t Pot_{\text{diss}} \cdot dt$$

$$\rightarrow E_{\text{dissipada}} = \int_0^t R \cdot \frac{\epsilon^2}{R^2} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} dt \rightarrow \boxed{E_{\text{dis}} = \frac{\epsilon^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{RC}} \cdot dt}$$

$$\rightarrow E_{\text{dis}} = -\frac{\epsilon^2}{R} \cdot \left(-\frac{RC}{2}\right) \cdot e^{-2t/RC} \Big|_0^t \therefore \boxed{E_{\text{dis}} = \frac{C \epsilon^2}{2} (1 - e^{-2t/RC})}$$

Energia armazenada

$$Pot \text{ total} = Pot \text{ dissipada} + Pot \text{ armazenada} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{total}} \cdot \Delta t = E_{\text{dis}} \Delta t + E_{\text{arm}} \Delta t \therefore \boxed{E_{\text{total}} = E_{\text{dis}} + E_{\text{arm}}}$$

$$\rightarrow \frac{\epsilon \cdot i}{\Delta t} = \frac{C \cdot \epsilon^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}}) + E_{\text{armazenada}} \therefore E_{\text{arm}} = \frac{\epsilon \cdot i}{\Delta t} - \frac{C \cdot \epsilon^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}})$$

$$\rightarrow \text{para } \Delta t \rightarrow \infty$$

$$E_{\text{arm}} = \frac{\epsilon \cdot i}{\Delta t} - \frac{C \cdot \epsilon^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}}) \therefore \boxed{E_{\text{arm}} = \frac{C \epsilon^2}{2}}$$

$$\text{Portanto } \boxed{E_{\text{total}} = C \cdot \epsilon^2}$$

Eletrodinâmica (p. 37)

Potência útil máxima

$$Pot_{\text{útil}} = \mathcal{E} \cdot i - r \cdot i^2 \quad \therefore \quad \boxed{Pot_{\text{útil max}} = \frac{d Pot_{\text{útil}}}{d i} = 0}$$

$$\rightarrow \frac{d(\mathcal{E}i - r \cdot i^2)}{d i} = 0 \quad \therefore \quad \mathcal{E} - 2 \cdot r \cdot i = 0 \rightarrow \boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{2r}}$$

$$\text{sendo } \rightarrow \boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{2r}} \rightsquigarrow Pot_{\text{útil max}} = \mathcal{E} \cdot \frac{\mathcal{E}}{2r} - r \left(\frac{\mathcal{E}}{2r} \right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow Pot_{\text{útil max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{2r} - r \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{4r^2} \quad \boxed{P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}}$$

~~Circuito~~ Como $P = U \cdot i$ e $P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ e $i = \frac{\mathcal{E}}{2r}$ \rightarrow

$$\rightarrow \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = U \cdot \frac{\mathcal{E}}{2r} \quad \therefore \quad \boxed{U = \frac{\mathcal{E}}{2}}$$

$$\text{Como } \mathcal{E} = (R + r) \cdot i \Rightarrow \mathcal{E} = (R_{\text{pot max}} + r_{\text{int}}) \cdot \frac{\mathcal{E}}{2r} \rightarrow$$

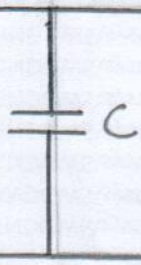
$$\rightarrow 1 = \frac{(R_{\text{pot max}} + r_{\text{int}})}{2r} \quad \therefore \quad 2r = (R_{\text{pot max}} + r_{\text{int}})$$

Portanto: $\boxed{R_{\text{pot max}} = r_{\text{interno}}}$

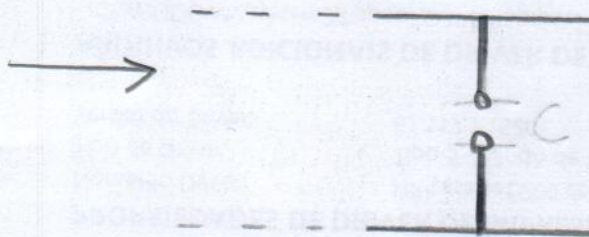
Eletrodinâmica (pt. 18)

Circuitos equivalente de Thevenin

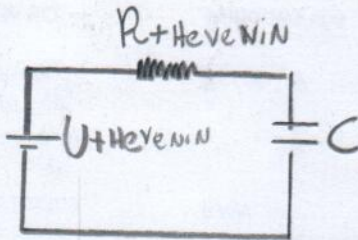
Serve para facilitar a análise de elementos específicos em circuitos complexos.



Queremos calcular as propriedades deste capacitor, mas o circuito é complexo



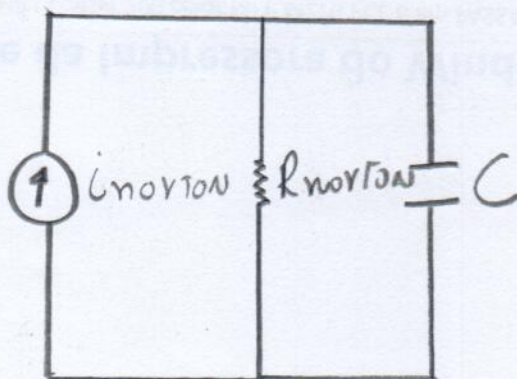
"Retiramos" o capacitor e calculamos a resistência equivalente e a tensão equivalente



Substituímos em um circuito simples a resistência equivalente e a D.D.P. equivalente, então conectamos o elemento em série.

Circuitos equivalente de Norton

A ideia é a mesma do ~~circuito~~ circuito de Thevenin, mas agora colocamos o elemento associado em paralelo com a resistência equivalente e com uma fonte de corrente.



MAGNETUM



Electromagnetismo

0 1

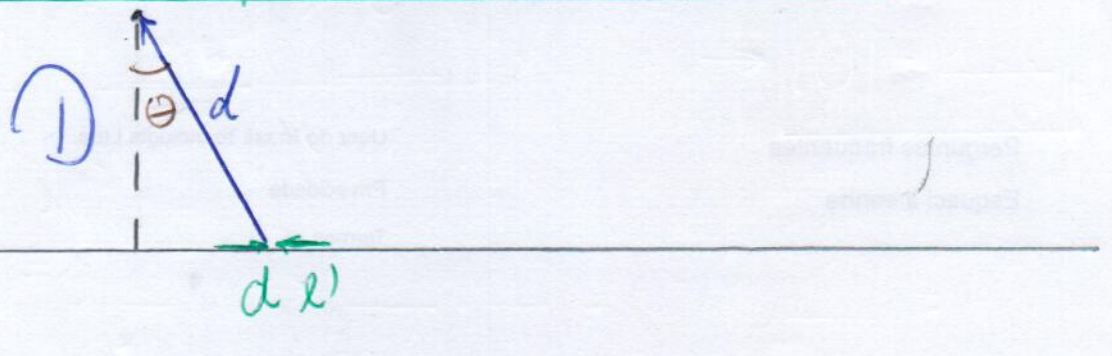
Campo magnético

Lei de Biot-Savart

O físico Hans Christian Ørsted contribuiu a física ao publicar seus diversos experimentos envolvendo o efeito da corrente elétrica em aparelhos influenciados por campos magnéticos, como a bússola.

Ele publicou seus experimentos, e os físicos franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart se mostraram interessados. Os franceses foram capazes de aprimorar os experimentos e formular uma lei empírica

* Campo elétrico gerado por uma corrente retilínea



$$l' = D \cdot \tan \theta \quad \cdot \quad dl' = \frac{D}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$D = d \cos \theta \rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2 \theta}{D^2}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu \cdot i}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{D^2} \right) \left(\frac{D}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta d\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu \cdot i}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu \cdot i}{4\pi D} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{no caso} \rightarrow \infty \wedge \theta_1 = 0 \wedge \theta_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu \cdot i}{2\pi D}}$$

Eletrromagnetismo (pt. 2)

0 12

Continuações da Lei de Biot-Savart

Lei geral:

Se fizermos o produto vetorial $d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}$, em que $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor unitário na direção $d-d'$, em que r é o vetor deslocamento e r' a posição infinitesimal de $d\mathbf{l}$.

$$\rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu \cdot i}{4\pi r^2} \cdot d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mu \cdot i \cdot d\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{4\pi \cdot |d-d'|^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int d\mathbf{B} = \int \frac{\mu \cdot i \cdot d\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{4\pi \cdot |d-d'|^2} \rightarrow \boxed{B(d) = \frac{\mu \cdot i}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (d-d')}{|d-d'|^3}}$$

Introdução às equações de Gauss para o magnetismo

Precisamos saber uma notação; vem do teorema de Stokes:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{y} \right) = \frac{y \nabla x - x \nabla y}{y^2}$$

Essa identidade nos possibilitará de escrever:

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{l} \times (d-d')}{|d-d'|^3} \right) = \frac{|d-d'|^3 \nabla \cdot [d\mathbf{l} \times (d-d')] - [d\mathbf{l} \times (d-d')] \nabla (|d-d'|^3)}{|d-d'|^6}}$$

Continuação da Lei de Gauss

$$\nabla \cdot (|d-d'|)^3 = \nabla \cdot \left\{ [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (|d-d'|)^3 = 3(x-a)|d-d'| \hat{i} + 3(y-b)|d-d'| \hat{j} + 3(z-c)|d-d'| \hat{k}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (|d-d'|)^3 = 3|d-d'| \cdot (d-d')$$

$$\nabla \cdot (|d-d'|)^3 \cdot (d-d') = 3|d-d'| \cdot (d-d')^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (|d-d'|)^3 \cdot |d-d'| = 3|d-d'|^3$$

$$\boxed{\nabla \cdot (d-d') = 3}$$

→ Fazendo o produto vetorial de $|d-d'|$ por ele mesmo:

$$|d-d'| \times |d-d'| = |d-d'|^2 \cdot \sin \theta \hat{e}_j \quad \theta = 0$$

$$\boxed{|d-d'| \times |d-d'| = 0}$$

portanto:

$$\boxed{\nabla \cdot (|d-d'|^3) \cdot [d \ell \times (d-d')] = 0}$$

Electromagnetismo (pt. 4)

Lei de Gauss (pt. 3)

$$\nabla \cdot (|\mathbf{d}-\mathbf{d}'|^3) \cdot [\mathbf{d}l \times (\mathbf{d}-\mathbf{d}')] = 0$$

$$\rightarrow \nabla \cdot [\mathbf{d}l \times (\mathbf{d}-\mathbf{d}')] = [\nabla \times \mathbf{d}l] \cdot (\mathbf{d}-\mathbf{d}') - \mathbf{d}l \cdot [\nabla \times (\mathbf{d}-\mathbf{d}')] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla \times (\mathbf{d}-\mathbf{d}') = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{d}l = 0}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

$$\rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0}$$

A lei de Gauss relaciona o fluxo magnético com os módulos dos polos magnéticos envolvidos no sistema

Eletrromagnetismo (pt. 5)

05

Lei de Faraday

Segundo a lei de Gauss, temos que o fluxo magnético é na mesma forma geral:

$$\Phi = \oint \mathbf{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \oint (\mathbf{B} \cdot \hat{s}) dS = 0$$

$$\rightarrow |\mathbf{B}| \cdot |S| \cdot \cos\theta = 0 \rightarrow \text{como } B \neq 0 \text{ e } S \neq 0; \cos\theta = 0$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{R} \rightarrow$ para $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, existe um fluxo

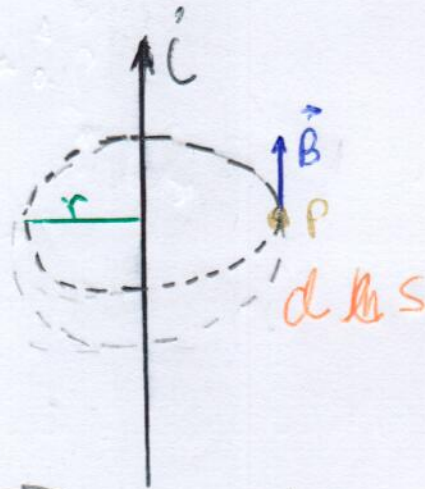
$$\rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \oint_{\text{FECHADA}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\rightarrow \oint_{\text{F}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{S} \right) = \oint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E}$ (força eletromotriz induzida)

$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{B \cdot \text{Área} \cdot \cos\theta}{t}}$$

Lei de Ampere

$$B = \frac{\mu \cdot i}{2\pi r} \rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot dS \cdot \cos\theta, \theta = 0 \therefore \cos 0 = 1$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint B \cdot dS; \text{ conduzindo a corrente constante}$$

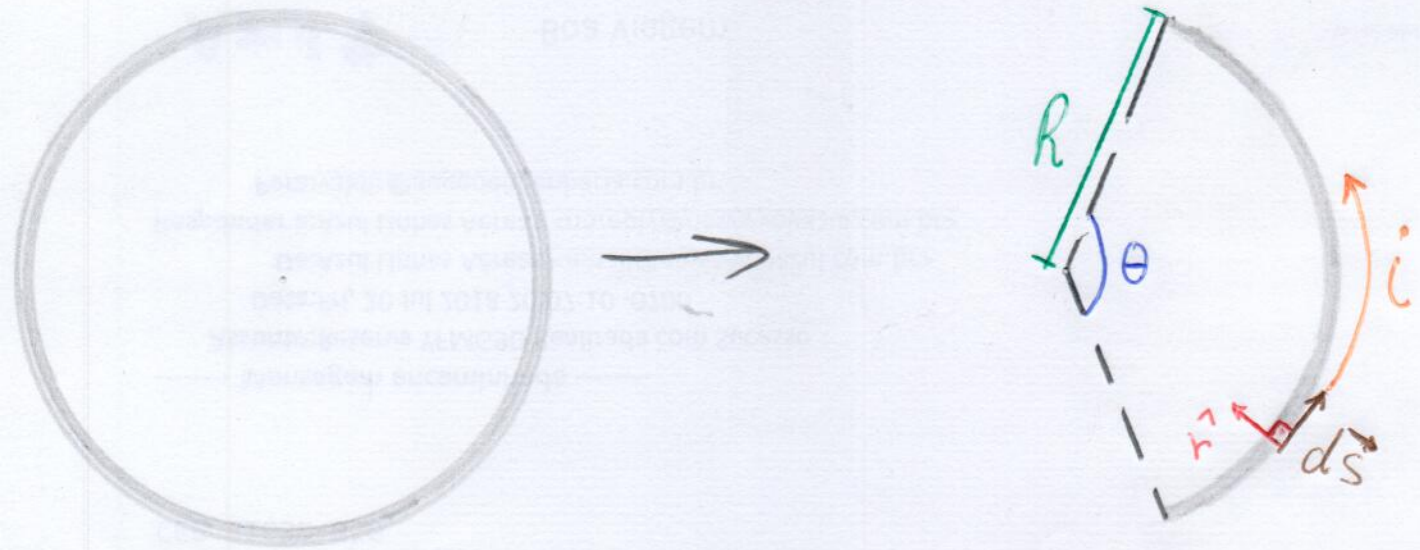
$$B \oint dS \rightarrow B \text{ é cte em todos os pontos } p$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu \cdot i \cdot 2\pi r}{2\pi r} \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \cdot i$$

↳ circunferência

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \cdot i$$

Campo magnético gerado por um fio circular



$$B = \int dB \rightarrow dB = \frac{\mu \cdot i \cdot ds \cdot \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{\mu \cdot i \cdot ds}{4\pi R^2}$$

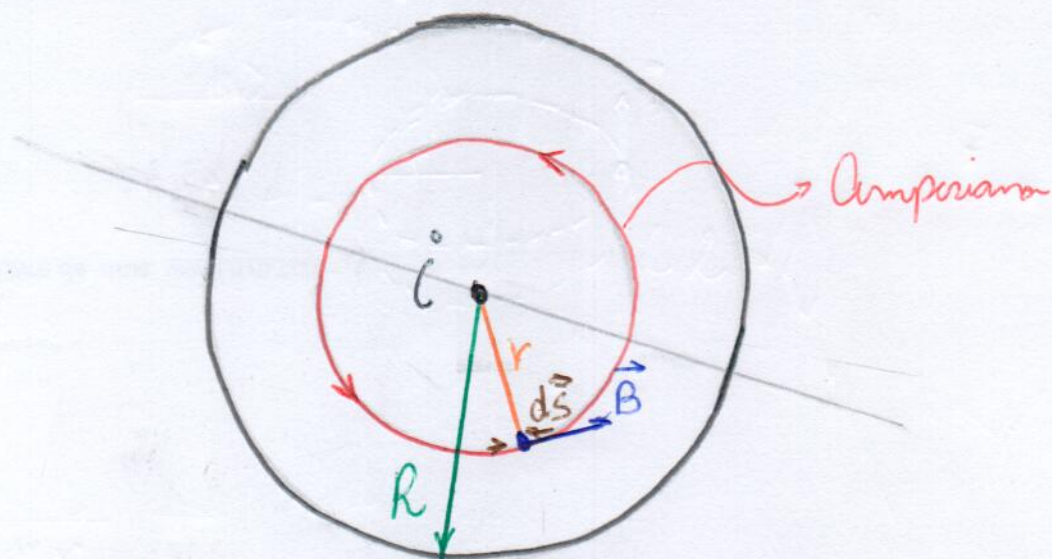
$$\rightarrow B = \int_0^\theta \frac{\mu \cdot i \cdot R \cdot d\theta}{4\pi R^2} \Rightarrow \int_0^\theta \frac{\mu \cdot i \cdot d\theta}{4\pi R} = \frac{\mu \cdot i}{4\pi R} \int_0^\theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu \cdot i \cdot \theta}{4\pi R} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu \cdot i \cdot \theta}{4\pi R}}$$

→ Para uma circunferência inteira, temos 1 volta inteira. $\theta = 2\pi$

$$\rightarrow B = \frac{\mu \cdot i \cdot 2\pi}{4\pi R} \therefore \boxed{B = \frac{\mu \cdot i}{2R}}$$

Campo magnético no interior de um fio retilíneo



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi R) \rightarrow i \text{ no interior da amperiana: } i_{int}$$

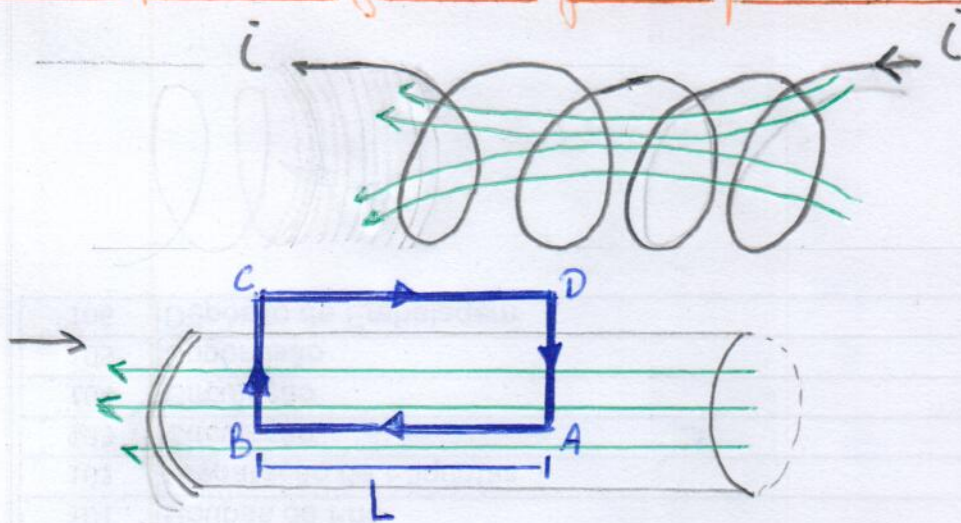
$$\rightarrow i_{int} = \frac{i \cdot \pi r^2}{\pi R^2} \rightarrow \text{como } \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \cdot i \text{ (Lei de Ampere)}$$

$$\rightarrow B(2\pi R) = \mu \cdot i_{int} \text{ como } i_{int} = i \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu \cdot r}{R^2(2\pi)} \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu \cdot r}{R^2 \cdot 2\pi}}$$

Eletrromagnetismo (pt. 9)

Campo magnético gerado por uma bobina



Lei de Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \cdot i$ →

$$\rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

• O campo perpendicular a \vec{S} . ($\cos 90^\circ = 0$)

Número de bobinas por unidade de comprimento (χ)

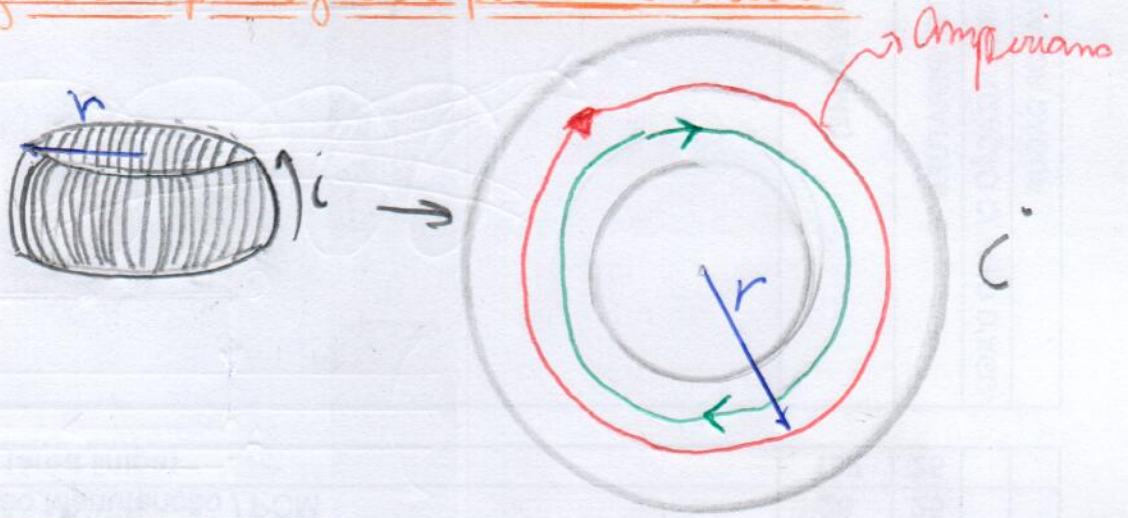
$$\rightarrow i \cdot \chi \cdot L = \text{Ampereana} \quad \boxed{\chi = \frac{N}{L}} \rightarrow \frac{N}{L} \rightarrow \text{Número de bobinas por unidade de comprimento}$$

$$\rightarrow B \cdot L = \mu \cdot i \cdot \chi \cdot L \therefore B = \mu \cdot i \cdot \chi$$

$$\text{Como } \chi = \frac{N}{L} \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu \cdot i \cdot N}{L}}$$

Eletromagnetismo (pt. 30)

Campo magnético produzido por uma toróide



$$\text{Camp} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i \cdot N \rightarrow \cdot N \rightarrow \text{número de bobinas}$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot i \cdot N \rightarrow$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot N}{2\pi r}$$

Eletrromagnetismo (pt. 11)

Lei de Lorentz (Força magnética)

Campo elétrico $\rightarrow E(t) = -\frac{d}{dt} \cdot \phi(t)$

$$\rightarrow \phi(t) = \oint B(r, t) \cdot \hat{n} \cdot dS \rightarrow$$

$$\rightarrow \oint E(r, t) \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int B(r, t) \hat{n} \cdot dS \rightarrow$$

$$\rightarrow E(t) = \oint E(r, t) \cdot dl \rightarrow \oint E(r, t) \cdot dl = -\int \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \cdot \hat{n} \cdot dS$$

Colocando na forma diferencial, ressaltando o teorema de Stokes

$$\nabla \cdot E(r, t) = -\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} V(r, t) = -\frac{\partial}{\partial t} B(r, t) \rightarrow$$

↳ vetor potencial do sistema

$$\rightarrow \boxed{E(r, t) = -\frac{\partial}{\partial t} V(r, t) - \nabla \psi_e(r, t)} \rightarrow$$

• $\psi_e \rightarrow E$ é uma função de potencial elétrico escalar, dependente do tempo

Caso a carga elétrica esteja se movimentando \rightarrow

$$V(r, t) \cdot dl = V_x \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds + V_y \frac{\partial y}{\partial s} ds + V_z \frac{\partial z}{\partial s} ds$$

$$\rightarrow l(t, s) = r(t, s) = x(t, s) \hat{i} + y(t, s) \hat{j} + z(t, s) \hat{k}$$

Electromagnetismo (pt. 12)

Lei de Laplace (Força magnética) (pt. 2)

$$\oint V(r,t) \cdot dl = \oint \left(V_x \frac{\partial x}{\partial s} + V_y \frac{\partial y}{\partial s} + V_z \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds$$

→ Para cada instante temos que:

$$\oint V(r,t) \cdot dl = \int_0^1 \left(V_x \frac{\partial x}{\partial s'} + V_y \frac{\partial y}{\partial s'} + V_z \frac{\partial z}{\partial s'} \right) ds'$$

$$\rightarrow s' = \frac{s}{s_{TOTAL}}$$

- Derivando o tempo:

$$\frac{d}{dt} \oint V(r,t) \cdot dl = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\{ V_x[r(t,s),t] \frac{\partial x}{\partial s} + V_y[r(t,s),t] \frac{\partial y}{\partial s} + V_z[r(t,s),t] \frac{\partial z}{\partial s} \right\}$$

$$\rightarrow \int \left[\frac{\partial V_x(r,t)}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V_y(r,t)}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial t} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial t} + \left(V_x(r,t) \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + V_y(r,t) \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + V_z(r,t) \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \right) ds$$

$$\rightarrow \frac{dx(t,s)}{dt} = \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = v_x \rightarrow \text{velocidade em } x$$

↳ De forma análoga encontra-se v_y e v_z

Electromagnetismo (pt. 13)

Lei de Larmor (pt. 3)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{V} \rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + B_z \text{ e } \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial z} - B_y$$

$$\rightarrow \oint_0 \left(B_z \frac{\partial y}{\partial s} - B_y \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} \cdot ds$$

$$\rightarrow \oint_0 \left(B_z \frac{\partial y}{\partial s} - B_y \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial V_x}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} ds$$

$$\rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + V_y \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(V_x \frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \oint V(r, t) \cdot dl = \oint \left[\frac{\partial}{\partial t} (r, t) - \mathbf{v}(r, t) \times \mathbf{B}(r, t) \right] \cdot dl$$

$$\rightarrow \mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial t} \hat{k} \rightarrow \text{então } dl = - \oint \left[\frac{\partial V(r, t)}{\partial t} - \mathbf{v} \right]$$

$$\oint \mathbf{E}(r, t) \cdot dl = - \oint \left[\frac{\partial}{\partial t} \cdot V(r, t) - \mathbf{v}(r, t) \times \mathbf{B}(r, t) \right] \cdot dl$$

$$\rightarrow \mathbf{E}(r, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \cdot V(r, t) - \nabla \psi(r, t) + \mathbf{v}(r, t) \times \mathbf{B}(r, t)$$

$$\rightarrow \mathbf{E}(r, t) = E(r, t) + \mathbf{v}(r, t) \times \mathbf{B}(r, t) \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \rightarrow \mathbf{F} = E \cdot |q| \dots$$

$$\therefore \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rightarrow \boxed{\mathbf{F} = |q| \cdot \mathbf{E} + |q| \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$

Eletrromagnetismo (pt. 15)

Câmara de bolhas (pt. 2)

A câmara de bolhas, foi criada para observar o movimento de partículas carregadas. É possível observar esse movimento, pois a partícula analisada ao se movimentar no líquido deixa um rastro

Devido a força de Lorentz resultante devido a presença das bolhas, cargas tendem a um movimento helicoidal



O sentido do movimento depende do valor da carga, isto ocorre devido ao diferente sentido de spins da partícula; fazendo com que o momento magnético de uma molécula + tenha direção oposta a -.

Equação de movimento de uma partícula carregada:

$$m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \cdot v \times B(r, t)$$

↪ Não apresentado na parte de relativismo.

PHYSICIS MODERN

(PT.1)



Contribuições de Louis de Broglie

- * O fóton é uma partícula que possui energia e impulso
- * É também uma onda de frequência " ν ".

Parc de Broglie isso não é apenas uma peculiaridade do fóton, mas de tudo.

"Matter waves" / Ondas de matéria

Não ondas que representam uma amplitude probabilística

- * Parc "ondas plasmãs" (onda de frequência constante).

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

Comprimento de onda de de Broglie

- * Parc uma partícula livre de impulso \vec{p} , ~~se~~ pode-se associar com uma onda plana.

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \rightarrow \quad p = \vec{p} \quad \rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda} //$$

Para fótons:

$$p_x = \frac{E_x}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

- * Quando faz a análise de um spin, existe várias funções de onda, você pode colocar um eixo, fornecendo propriedades de direção

$$\Psi(\vec{x}; t) \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Depende do tempo e posição}$$

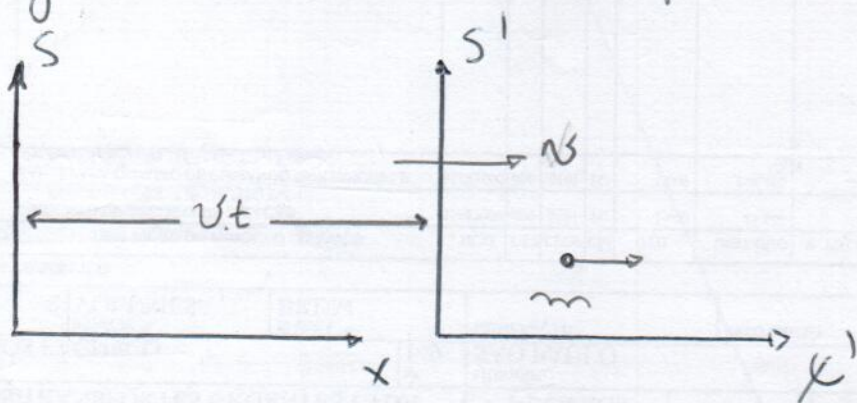
Contribuições de Louis de Broglie (pt. 2)

Notemos que: $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\frac{2\pi}{k}} = h \cdot k //$

* k = número de onda.

Os 2 referenciais

Os referenciais são relacionados pela transformação de Galileu.



No $t=0$, $t'=t \rightarrow x' = x - v \cdot t$

* Como a partícula tem velocidade $\tilde{v} > 0$ para o referencial S

$$p = m \cdot \tilde{v} > 0$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

* Para o referencial S' :

$$\tilde{v}' \rightarrow \tilde{v} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - vt)}{dt} = \tilde{v} - v$$

então: $p' = m \cdot \tilde{v}' = m(\tilde{v} - v) = p - m \cdot v$

$$\lambda' = \frac{h}{|p - mv|} \neq \lambda = \frac{h}{p}$$

Contribuições de de Broglie. (pt. 3)

Uma onda "normal", como uma sonora, não sofre alterações ao realizar uma transformação de Galileu.

Com base nos cálculos realizados anteriormente percebe-se que ondas de matéria não se comportam desta forma.

Isso significa que ondas de matéria não podem ser medidas diretamente.

Mas qual é a frequência de uma onda de matéria

$$p = \hbar \cdot k, \quad E = \hbar \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

Fase da onda: $kx - \omega t$

* Velocidade de fase:

A velocidade cuja os nós e o "maximo" desta onda plana se movem.

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{m \cdot v} = \frac{v}{2}$$

* Velocidade de grupo:

Velocidade de um pacote de ondas construídas por superposição de ondas.

$$v_{\text{grupo}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_k = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = v$$

Contribuições de de Broglie (pt. 4)

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \rightarrow 4 \text{ vetores} \quad \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \rightarrow 4 \text{ vetores}$$

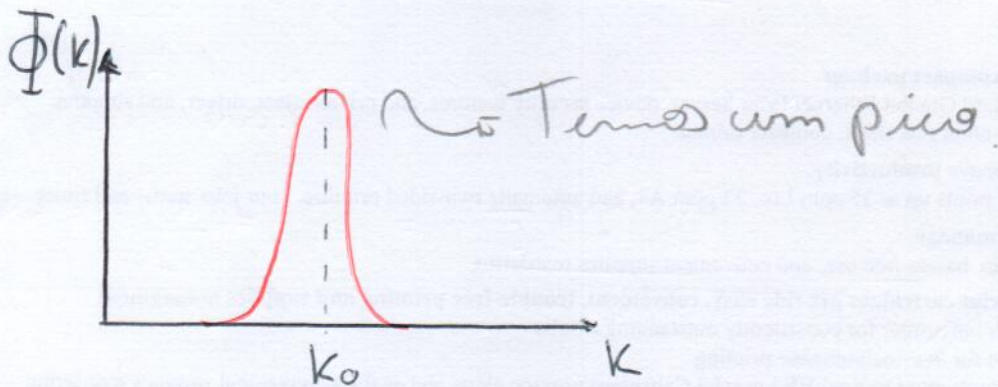
$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

Então para fótons: $E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega$

* Para a teoria da relatividade especial

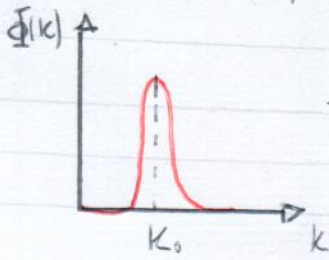
~~Velocidade~~ Velocidade de grupo

Terms: $\Psi(x, t) = \int dk \Phi e^{i(kx - \omega(k)t)}$
 $\omega(k) \rightarrow$ função $k \rightarrow \omega(k)$



Método da fase estacionária

Se você está integrando uma função multiplicada por uma onda, você não terá resultado nenhum, exceto nos lugares em "picos", nos quais a onda adquiri um maior comprimento.



→ Apenas para k_0 a integral pode ser $\neq 0$

nós precisamos que esta fase se torne uma fase estacionária, respeitamos o k , que é a variável de integração de k_0 .

$$\varphi(k) = kx - \omega(k) \cdot t \rightarrow \left. \frac{d\varphi(k)}{dk} \right|_{k_0} = x - \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k_0} = 0$$

$$x = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k_0} \cdot t$$

→ Velocidade de grupo

$$\Psi(x, t) = \int dk \Phi(k) e^{i(kx - \omega(k) \cdot t)} \rightarrow \Psi(x, 0) = \int dk \Phi(k) \cdot e^{ikx} //$$

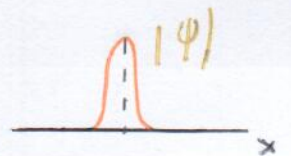
+ Aplicando a série de Taylor para: $\omega(k)$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \text{ordem}((k - k_0)^2)$$

$$\Psi(x, t) = \int dk \Phi(k) e^{ikx} \cdot e^{-i\omega(k_0)t} \cdot e^{-ik \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t} \cdot e^{ik_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t}$$

$$\rightarrow \Psi(x, t) = e^{-i\omega(k_0)t} \cdot e^{ik_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t} \int dk \Phi(k) e^{ik(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t)}$$

$$\rightarrow |\Psi(x, t)| = |\Psi(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t, 0)| \quad \underline{t=0}$$



Contribuição de de Broglie (pt. 6)

Partícula com impulso e energia

$$E = h \cdot \omega$$

$$p = h \cdot k$$

Para ondas planas em x , pode ser escritas quais equações?

I) $\sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$ \rightarrow Não é válido

II) $\cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ \rightarrow Não é válido

III) $e^{ikx - i\omega t}$ $\checkmark \rightarrow$ É válido

IV) $e^{-ikx + i\omega t}$ $\checkmark \rightarrow$ É válido

Nós vamos "produzir" com essas ondas um estado em que a partícula tem probabilidades iguais para se mover para direita e para esquerda

I) $\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) = 2 \cdot \sin kx \cos \omega t$

Quando $(\omega \cdot t) = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ a equação = 0, portanto \times

II) $\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t) = 2 \cdot \cos kx \cos \omega t$

mesmo argumento, quando $(\omega \cdot t) = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ a equação = 0 \times

III) $e^{ikx - i\omega t} + e^{-ikx - i\omega t} = (e^{ikx} + e^{-ikx}) e^{-i\omega t} = 2 \cdot \cos kx e^{-i\omega t} \rightarrow$

$e^{-i\omega t} \rightarrow$ nunca é = 0 \checkmark

IV) $e^{-ikx} e^{i\omega t} + e^{ikx} e^{i\omega t} = 2 \cdot \cos kx e^{i\omega t} \rightarrow e^{i\omega t} \neq 0 \checkmark$

Contribuições de de Broglie (pt. 7)

Considerando que III e IV estão corretos, nós podemos fazer uma superposição entre elas.

$$e^{ikx - i\omega t} + e^{-ikx - i\omega t} = 2 \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$2 \cdot \cos(kx - \omega t)$ representa uma partícula se movendo apenas para a ~~esq~~ direita, portanto algo está errado.

Para funcionar devemos escolher apenas uma das equações
Escolha:

$$\Psi(x, t) = e^{ikx - i\omega t}$$

Esta é a equação de matéria para uma partícula de impulso $p = \hbar \cdot k$, e energia $E = \hbar \cdot \omega$.

- ω = frequência angular
- k = fase de onda.

Equações de Schrödinger

Onda de matéria

$$\Psi = e^{i k x - i \omega t}$$

* $p = \hbar \cdot k$ (quantidade de movimento)
* $E = \hbar \cdot \omega$ (energia)

Energia não-relativística

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

* Para uma partícula livre:

$$\Psi = e^{i k x - i \omega t} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = \hbar \cdot k \cdot \Psi(x, t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \hbar \cdot k = p \therefore \hbar \cdot k \cdot \Psi(x, t) = p \Psi(x, t)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = p \Psi(x, t)$$

↳ Esse é o "operador de impulso",

Operador é algo que "atua" em uma função e "devolve" também uma função.

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

\hat{p} = operador de impulso

Equações de Schrödinger (pt. 2)

$$\hat{p} \Psi(x, t) = p \Psi(x, t)$$

$\Psi(x, t)$ é um autostado (ou eigenstate) do operador impulso

$\Psi(x, t)$ é um estado de impulso definido

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar (-i\omega) \Psi = \hbar \cdot \omega = E \cdot \Psi(x, t)$$

$$\text{Como } E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow E \Psi = \hat{O} \cdot \Psi$$

* \hat{O} = operador "qualquer"

$$E \Psi = \frac{p^2}{2m} \Psi = \frac{p^2}{2m} (p \Psi) = \frac{p}{2m} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2m} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p \Psi) = \frac{1}{2m} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}} = E \Psi$$

$$\rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \hat{E} \text{ (operador energia)}$$

O operador energia (\hat{E}) está atuando na função Ψ e de fato igual a energia multiplicada por Ψ .

* Ψ é um autostado de energia.

* E um estado de energia definido.

Equações de Schrödinger (pt. 3)

$$\hat{E} = \frac{-\hbar}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{p}^2 = \hat{p} \cdot \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}}$$

Equações de Schrödinger para uma partícula livre

Como $\Psi = e^{-i\omega t + ikx}$, se derivarmos temos:

$$i\hbar(-i\omega)\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}(ik)\Psi = \hbar \cdot \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{E}{2m}$$

Schrodinger (pt. 4)

Soluções gerais para a equação de Schrödinger

Considerando a superposição das ondas de matéria:

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} dk \Phi e^{ikx} \cdot e^{-i\omega(k)t}$$

* ω é em função de k , pois isso que representa uma partícula livre.

* Essa é uma solução, mas também será qualquer superposição destas partículas. E elas são parametrizadas por k

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\Phi(k)}_{\text{localizado}} e^{ikx - i\omega t} \quad \left. \vphantom{\int} \right\} \text{"Resolve" a equação}$$

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = v$$

* Considerações

* Ψ não pertence aos reais. $\Psi \in \mathbb{C}$

* Não é uma equação de onda comum.

$$\Psi \neq \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \therefore \underbrace{\phi \sim F(x \pm vt)}_{\text{soluções real}}$$